문항카드 5. 논술전형 수학 오전 1번

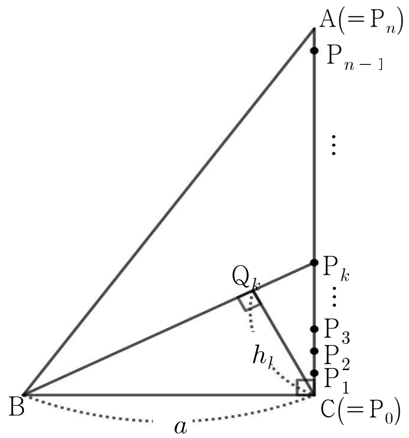
1. 일반 정보

유형		■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사
전형명		수시모집 논술전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호		자연계열1(수학, 오전)/ 1번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분Ⅰ, 미적분Ⅱ
	핵심개념 및 용어	정적분, 급수, 치환적분법
예상 소요 시간		15분/전체 90분

2. 문항 및 제시문

[문제 1]

그림과 같이 $\overline{AC}=1$, $\overline{BC}=a$ $(a>0)$이고 $\angle BCA=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 자연수 n에 대하여 선분 CA를 n등분한 각 분점을 점 C에서 가까운 것부터 차례로 $P_0(=C)$, P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{n-1}, $P_n(=A)$이라 하자. $1 \le k \le n$인 자연수 k에 대하여 선분 BP_k에 내린 수선의 발을 Q_k라 하고, 선분 CQ_k의 길이를 h_k라 하자. h_k의 평균을 H_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} H_n$을 구하시오.



3. 출제 의도

고교 교육과정에서 중요하게 다루는 <미적분Ⅰ>, <미적분Ⅱ> 과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 정적분, 급수, 치환적분법에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[미적분Ⅰ] (라) 다항함수의 적분법 2 정적분 ② 정적분의 뜻을 안다. ③ 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.

	미적1422. 정적분의 뜻을 안다. 미적1423. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다. [미적분 II] (라) 적분법 $\boxed{1}$ 여러 가지 적분법 ① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분 I	김원경 외	비상교육	2014	153
	미적분 I	황선욱 외	좋은책신사고	2014	166
	미적분 II	황선욱 외	좋은책신사고	2014	150~151
	미적분 II	이강섭 외	미래엔	2014	166~168

5. 문항 해설

삼각형 $\mathrm{P}_k\mathrm{BC}$의 넓이를 두 가지 방법으로 계산하면, $h_k \times \sqrt{a^2+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = a \times \frac{k}{n}$ 이므로

$h_k = \frac{ak}{n} \times \frac{1}{\sqrt{a^2+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$ 를 얻는다. 따라서 $H_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{ak}{n}}{\sqrt{a^2+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$ 이고,

$\lim_{n\to\infty} H_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{ak}{n}}{\sqrt{a^2+\left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \int_0^1 \frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = a(\sqrt{a^2+1}-a)$이다.

또는 $a\sqrt{a^2+1}-a^2$.

문항카드 6. 논술전형 수학 오전 2번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열1(수학, 오전)/ 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분Ⅰ
	핵심개념 및 용어	수열의 합, 수열의 극한, 부분합
예상 소요 시간	15분/전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2]

급수 $1^2+m\times 2^2+3^2+m\times 4^2+5^2+m\times 6^2+\cdots$ 에서 첫째 항부터 제n번째 항까지의 부분합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 m의 형태를 나타내시오.

3. 출제 의도

고교 교육과정에서 중요하게 다루는 <수학Ⅱ>, <미적분Ⅰ> 과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 수열의 합, 수열의 극한, 부분합에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[수학Ⅱ] (다) 수열 2 수열의 합 ① $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. ② 여러 가지 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다. 수학2321. $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 수학2322. 여러 가지 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다. [미적분Ⅰ] (가) 수열의 극한

	$\boxed{1}$ 수열의 극한 ② 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. 미적1111. 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. $\boxed{2}$ 급수 ① 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. 미적1122. 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	이준열 외	천재교육	2014	138～145
	수학 II	황선욱 외	좋은책신사고	2014	119～124
	미적분 I	김원경 외	비상교육	2014	15～17, 27～28
	미적분 I	이준열 외	천재교육	2014	18～20, 34～36

5. 문항 해설

$$
\begin{aligned}
S_{2n-1} &= 1^2 + m\times 2^2 + 3^2 + m\times 4^2 + \cdots + m\times(2n-2)^2 + (2n-1)^2 \\
&= 1^2 + \cdots + (2n-1)^2 + m\{2^2 + \cdots + (2n-2)^2\} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\{(2k-1)^2 + 4m(k-1)^2\} \\
&= \frac{n(2n-1)}{3}\{2(m+1)n - (2m-1)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{2n} &= 1^2 + m\times 2^2 + 3^2 + m\times 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 + m\times(2n)^2 \\
&= 1^2 + \cdots + (2n-1)^2 + m\{2^2 + \cdots + (2n)^2\} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\{(2k-1)^2 + 4mk^2\} \\
&= \frac{n(2n+1)}{3}\{2(m+1)n + (2m-1)\}
\end{aligned}
$$

그러므로 극한을 계산하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3} = \frac{m+1}{6}$이 자연수가 되어야 한다.

따라서 $m = 6k-1$ (k는 자연수) 또는 $m = 6k+5$ (k는 0 이상의 정수)의 형태이다.

문항카드 7. 논술전형 수학 오전 3번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열1(수학, 오전)/ 3번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	기하와 벡터
	핵심개념 및 용어	평면벡터, 종점, 타원
예상 소요 시간	30분/전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

좌표평면에서 벡터 $\vec{a}$에 대한 다음의 두 명제 p_1, p_2가 있다.

p_1 : $\vec{a}+\vec{b}=\vec{v}$ 와 $|\vec{v}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}| \le 2|\vec{v}|$ 를 만족시키는 벡터 $\vec{b}$가 존재한다.

p_2 : $\vec{a}+\vec{b}=\vec{v}$ 와 $|\vec{a}|=m$, $|\vec{b}|=n$ 을 만족시키는 벡터 $\vec{b}$가 존재한다. (단, m과 n은 $0<m<n$인 고정된 실수이다.)

[문제 3-1] 벡터 $\vec{v}=(c,0)$일 때, 명제 p_1을 만족시키는 위치벡터 $\vec{a}$의 종점이 이루는 도형을 c를 이용하여 나타내시오. (단, c는 양의 실수이다.)

[문제 3-2] 명제 p_2를 만족시키는 벡터 $\vec{a}$의 집합을 S라고 할 때, 집합 S의 원소의 개수가 2가 되는 벡터 $\vec{v}$의 조건을 m과 n을 사용하여 나타내시오.

3. 출제 의도

고교 교육과정에서 중요하게 다루는 <기하와 벡터> 과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 평면벡터, 종점, 타원에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[기하와 벡터] (가) 평면곡선 1 이차곡선 ② 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. 기벡1112. 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. (나) 평면벡터

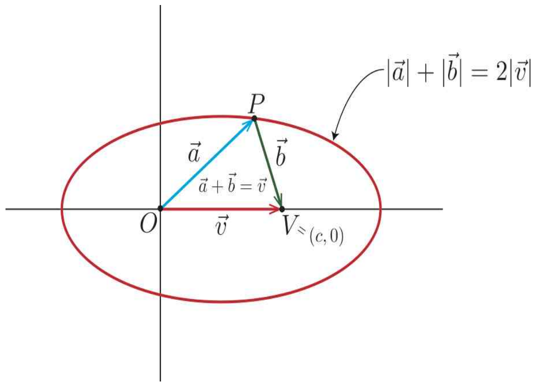
	1 벡터의 연산 ② 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. 기벡1211/1212. 벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈과 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. 2 평면벡터의 성분과 내적 ① 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다. 기벡1221. 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	김원경 외	비상교육	2014	16~20, 56~65, 71~78
	기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2014	17~22, 73~82, 90~96

5. 문항 해설

[3-1 번]



부등식의 경계인 $|\vec{a}|+|\vec{v}-\vec{a}|=2|\vec{v}|$를 직접 $\vec{a}$에 대해 계산하여 얻을 수도 있다.

즉, $\vec{a}=(x,y)$라 두면

$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(c-x)^2+y^2}=2c$ 를 얻고,

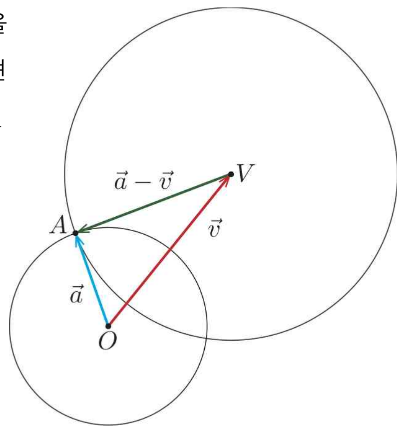
$$(c-x)^2+y^2=\left(2c-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$$
$$=4c^2-4c\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$$

과 같이 근호를 차례로 제거하여 정리하면,

$$\frac{\left(x-\frac{c}{2}\right)^2}{c^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)^2}=1.$$

이 방정식은 장축의 길이가 $2c$, 단축의 길이가 $\sqrt{3}c$인 타원이므로, 구하려는 도형은 이 경계선을 포함한 타원의 내부이다.

[3-2번]



벡터 $\vec{a}$ 가 집합 S의 원소이므로 $\vec{a}$가 $|\vec{a}|=m$과 $|\vec{a}-\vec{v}|=n$을 만족하는 서로 다른 2개의 $\vec{a}$가 존재한다. $\vec{v}$의 시점과 종점을 연결한 선분을 OV라 하고 $\vec{a}$의 시점과 종점을 연결한 선분을 OA라 했을 때, $\vec{a}-\vec{v}$ 를 나타내는 선분은 VA이다.

경우1. 선분 OV와 선분 OA가 한 직선상에 놓이지 않은 경우를 생각하자. 삼각형 OVA의 두변의 길이의 합이 나머지 한 변의 길이보다 크기 때문에 $|\vec{v}-\vec{a}|-|\vec{a}|<|\vec{v}|<|\vec{v}-\vec{a}|+|\vec{a}|$ 이 항상 성립한다.

따라서 $n-m=|\vec{v}-\vec{a}|-|\vec{a}|<|\vec{v}|<|\vec{v}-\vec{a}|+|\vec{a}|=n+m$

경우2. 선분 OV와 선분 OA가 평행하여 한 직선상에 놓인 경우를 생각하자.

1) $\vec{a}$ 와 $\vec{v}-\vec{a}$ 가 같은 방향인 경우
명제 p_2를 만족하는 $\vec{a}$ 는 벡터 $\vec{v}$ 의 방향과 일치하고 $|\vec{a}|=m$인 하나의 벡터밖에 없다.
2) $\vec{a}$ 와 $\vec{v}-\vec{a}$ 가 반대 방향인 경우
명제 p_2를 만족하는 $\vec{a}$ 는 벡터 $\vec{v}$ 의 방향과 반대이고 $|\vec{a}|=m$인 하나의 벡터밖에 없다.
따라서 $\vec{a}$가 $|\vec{a}|=m$과 $|\vec{a}-\vec{v}|=n$을 만족하는 서로 다른 2개의 $\vec{a}$가 있을 필요충분조건은 경우 1의 $n-m<|\vec{v}|<n+m$ 이다.

문항카드 8. 논술전형 수학 오전 4번

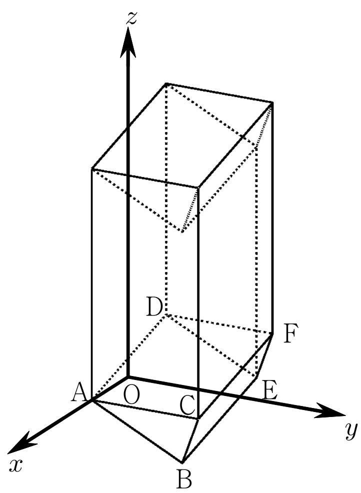
1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열1(수학, 오전)/ 4번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	기하와 벡터
	핵심개념 및 용어	공간좌표, 이면각, 정사영
예상 소요 시간	30분/전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

그림과 같이 좌표공간에서 $\mathrm{A}(1,0,0)$, $\mathrm{B}(0,1,-2)$, $\mathrm{C}(1,2,0)$, $\mathrm{D}(-1,0,1)$, $\mathrm{E}(-2,1,-1)$, $\mathrm{F}(-1,2,1)$를 꼭짓점으로 하는 삼각기둥 $\mathrm{ABC-DEF}$를 z축의 방향으로 6만큼 평행이동하는 동안 삼각기둥 $\mathrm{ABC-DEF}$가 그리는 다면체를 V라 하자. 다음 물음에 답하시오.



[문제 4-1] 다면체 V와 평면 $z=3$이 만나서 생기는 단면의 모양과 넓이를 구하시오.

[문제 4-2] 다면체 V의 부피를 구하시오.

3. 출제 의도

고교 교육과정에서 중요하게 다루는 <기하와 벡터> 과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 공간좌표, 이면각, 정사영에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[기하와 벡터] (다) 공간도형과 공간벡터 1 공간도형 ③ 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. 기벡1313. 정사영의 뜻을 알고, 정사영의 길이와 넓이를 구할 수

	있다. 2 공간좌표 ① 좌표공간에서 점의 좌표를 구할 수 있다. 기벡1321/1322. 좌표공간에서 점의 좌표를 이해하고, 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. 3 공간벡터 ④ 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면과 구의 방정식을 구할 수 있다. 기벡1334. 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면의 방정식과 구의 방정식을 구할 수 있다.

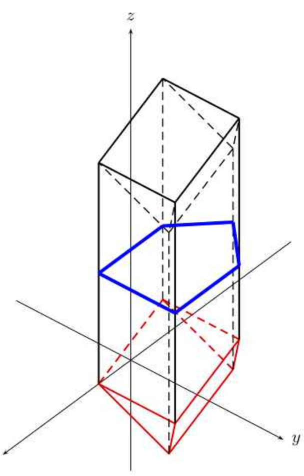
나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	김원경 외	비상교육	2014	122～125, 131～135, 157～164
	기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2014	155～158, 168～171, 204～212

5. 문항 해설

[문제 4-1]

먼저 삼각기둥 $\mathrm{ABC-DEF}$를 이루는 면들에 대해 법선벡터와 넓이를 구하여 보자.



(i) 앞면 삼각형 ABC는 세 변의 길이가 각각 2, $\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$인 이등변 삼각형이므로 피타고라스의 정리를 이용하여 높이가 $\sqrt{5}$임을 알 수 있고, 따라서 그 넓이는 $\sqrt{5}$이다. 세 점 $(1,0,0)$, $(1,2,0)$, $(0,1,-2)$가 이루는 평면의 방정식을 생각하면, 이에 수직인 벡터는 $(-2,0,1)$이다.

(ii) 마찬가지로, 사각형 ACFD의 넓이는 $2\sqrt{5}$이고. 세 꼭짓점을 골라 평면의 방정식을 생각하면, 이는 벡터 $(1,0,2)$와 수직임을 알 수 있다.

잘린 면의 모양은 오각형이며, 그 넓이는 (i), (ii)에서 구한 두 다각형을 평면 $z=3$에 정사영하여 얻을 수 있다. 먼저 삼각형 ABC와 $z=3$가 이루는 이면각을 θ_1이라 두면, $\cos(\theta_1)=\dfrac{(0,0,1)\cdot(-2,0,1)}{|(0,0,1)||(-2,0,1)|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. 마찬가지로 사각형 ACFD와 $z=3$가 이루는 각을 θ_2라 두면, $\cos(\theta_2)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\left(\because\ \theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{2}\right)$. 따라서 구하려는 잘린 면의 넓이는 $\sqrt{5}\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}+2\sqrt{5}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=5$가 된다.

[문제 4-2]

그림에 있는 다면체 V 내부에서 위쪽에 보이는 삼각기둥 모양을 제외한 것을 V'이라 하자. 평면 $z=1$ 로 자른 아래 부분을 입체도형의 위쪽으로 끼워넣는다고 생각하면 V'은 [문제 4-1]의 오각형을 단면으로 하고 높이가 6인 오각기둥과 같은 부피를 갖는다.

따라서 V의 부피는 $6\times(D\text{의 넓이})+(\text{삼각기둥의 부피})=6\times5+\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=35$이다.

문항카드 9. 논술전형 수학 오후 1번

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">수시모집 논술전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연계열2(수학, 오후)/ 1번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학II, 미적분II</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>합성함수, 치환적분법</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">20분/전체 90분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

[문제 1]

합성함수가 정의될 수 있는 범위에서 함수 $f(x)$에 대한 합성함수를 다음과 같이 나타내자.

$$(f \circ f)(x) = f^{<2>}(x),\ (f \circ f \circ f)(x) = f^{<3>}(x),\ \cdots,\ (\underbrace{f \circ f \circ \ \cdots \ \circ f}_{n})(x) = f^{<n>}(x)$$

편의상 $f^{<i>}(x)$를 $f^{<i>}$라 하고, $f^{<0>} = x$라 하자.

함수 $f(x) = \ln(x)$라 할 때, 부정적분 $\int \frac{f^{<n>}}{f^{<0>} f^{<1>} f^{<2>} \cdots f^{<n-2>}} dx$ 를 $f^{<i>}$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$로 나타내고, 그 이유를 설명하시오. (단, $n \geq 2$인 자연수이다.)

3. 출제 의도

고교 교육과정에서 중요하게 다루는 <수학II>, <미적분II> 과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 합성함수, 치환적분법에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[수학II] (나) 함수 1 함수 ② 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다. 수학2212. 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다. [미적분II] (가) 지수함수와 로그함수 2 지수함수와 로그함수의 미분 ② 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.

	미적2122. 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. (다) 미분법 [1] 여러 가지 미분법 ② 합성함수를 미분할 수 있다. 미적2312. 합성함수를 미분할 수 있다. (라) 적분법 [2] 여러 가지 적분법 ① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	이강섭 외	미래엔	2014	76～78
	수학 II	황선욱 외	좋은책신사고	2014	64～66
	수학 II	이준열 외	천재교육	2014	73～75
	미적분 II	이준열 외	천재교육	2014	37～40, 125～130, 176～182
	미적분 II	황선욱 외	좋은책신사고	2014	34～36, 100～103, 141～144

5. 문항 해설

합성함수 미분법에 의하여,

$$\frac{d}{dx}f^{<n-1>}=\frac{d}{dx}\ln(\ln\cdots(\ln(\ln x))\cdots)=\frac{1}{\ln(\ln\cdots(\ln(\ln x))\cdots)}\times\cdots\times\frac{1}{\ln x}\times\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{f^{<n-2>}\cdots f^{<1>}f^{<0>}}$$

이를 이용하여 직접 치환 적분을 할 수 있다.

$$\int f(f^{<n-1>})\frac{d}{dx}(f^{<n-1>})dx=\int f(y)dy=y(\ln y-1)+C=f^{<n-1>}(\ln(f^{<n-1>})-1)+C$$

$$=f^{<n-1>}(f^{<n>}-1)+C$$

정답 : $f^{<n-1>}[f^{<n>}-1]+C$ (단, C는 적분상수) 또는 $e^{f^{<n>}}(f^{<n>}-1)+C$ ($e^{\ln x}=x$이므로)

문항카드 10. 논술전형 수학 오후 2번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열2(수학, 오후)/ 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 미적분Ⅱ
	핵심개념 및 용어	원과 직선의 위치관계, 삼각함수의 극한
예상 소요 시간	20분/전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2]

좌표평면 위에 원 $C:(x-a)^2+y^2=1$이 있다. 원점 O에서 원 C에 그은 두 접선이 원과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자. 원점 O를 지나는 임의의 직선이 원 C와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 이 두 점의 중점을 M이라 하자. 두 점 P, Q를 포함하여 점 M이 나타내는 도형을 곡선 L이라 하자. $\angle \mathrm{POQ}=\theta$일 때, 곡선 L의 길이 l을 θ를 이용하여 나타내고, $\lim_{\theta \to 0+} l$의 값을 구하시오. (단, $a>1$인 실수이다.)

3. 출제 의도

고교 교육과정에서 중요하게 다루는 <수학Ⅰ>, <미적분Ⅱ> 과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 원과 직선의 위치관계, 삼각함수의 극한에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[수학Ⅰ] (다) 도형의 방정식 3 원의 방정식 ② 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. 수학1332-1. 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 말할 수 있다. [미적분Ⅱ] (2) 삼각함수 1 삼각함수의 뜻과 그래프 ① 일반각과 호도법의 뜻을 안다.

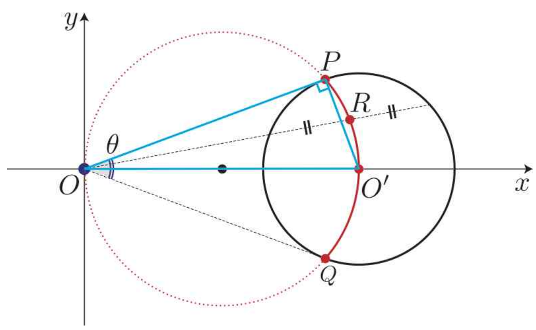
	미적2211-2. 호도법의 뜻을 알고, 각을 호도법과 60분법으로 나타낼 수 있다. [2] 삼각함수의 미분 ② 삼각함수의 극한을 구할 수 있다. 미적2222. 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	이강섭 외	미래엔	2014	177~179
	수학 I	류희찬 외	천재교과서	2014	176~180
	미적분 II	이준열 외	천재교육	2014	56~61, 97~100
	미적분 II	황선욱 외	좋은책신사고	2014	48~51, 79~82

5. 문항 해설

주어진 원의 중심을 $\mathrm{O}'(a,0)$이라 하면, $\overline{\mathrm{OO}'}=a$이다. 직각삼각형 $\mathrm{OO}'\mathrm{P}$로부터, $a=\dfrac{1}{\sin(\theta/2)}$. 또한 점 O'과 곡선 L 위의 임의의 점 R을 이으면, 두 선분 $\mathrm{O}'\mathrm{R}$와 OR가 서로 수직임을 쉽게 알 수 있다. 왜냐하면 R이 해당하는 현의 중점이기 때문이다. 따라서 L은 선분 OO'을 지름으로 하는 원 위의 점들 중 주어진 원 C의 내부에 있는 호이다. 중심각이 2θ이고 반지름은 $\dfrac{a}{2}$인 호 L의 길이는 $\dfrac{a}{2}\times 2\theta=\dfrac{\theta}{\sin(\theta/2)}$로 주어진다. 따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta}{\sin(\theta/2)}=2\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta/2}{\sin(\theta/2)}=2.$



문항카드 11. 논술전형 수학 오후 3번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열2(수학, 오후)/ 3번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분 I , 미적분 II
	핵심개념 및 용어	정적분, 평균값의 정리, 치환적분법
예상 소요 시간	25분/전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3]

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $I=\int_{-1}^{-b}\frac{f(a+x)}{x}dx+\int_{b}^{1}\frac{f(a+x)}{x}dx$ (단, a와 b는 실수이고, $0<b<1$ 이다.) 라 하자.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)$의 도함수가 $|f'(x)|\le 1$을 만족시킬 때, a와 b의 값에 관계없이 $|I|\le 2$ 임을 보이시오.

3. 출제 의도

고교 교육과정에서 중요하게 다루는 <미적분 I >과 <미적분 II> 과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 정적분의 정의, 평균값 정리에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[미적분 I] (다) 다항함수의 미분법 ③ 도함수의 활용 ② 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. 미적1332. 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. (라) 다항함수의 적분법 ② 정적분 ③ 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다. 미적1423. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.

	[미적분 II] (라) 적분법 1 여러 가지 적분법 ① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분 I	이준열 외	천재교육	2014	133～137, 188～194
	미적분 I	황선욱 외	좋은책신사고	2014	112～115, 163～167
	미적분 II	이준열 외	천재교육	2014	176～182
	미적분 II	황선욱 외	좋은책신사고	2014	141～144

5. 문항 해설

치환하여 다음과 같이 정리한다.

$$I=\int_{-1}^{-b}\frac{f(a+x)}{x}dx+\int_{b}^{1}\frac{f(a+x)}{x}dx=\int_{b}^{1}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}dx.$$

평균값의 정리에 의해

함수 $f(x)$가 구간 $[a-x,a+x]$에서 연속이고 구간 $(a-x,a+x)$에서 미분가능하므로

$\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{2x}=f'(c)$인 c가 구간 $(a-x,a+x)$에 존재한다.

$\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}=2f'(c)$ 이므로 $-2\le\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}\le 2$ 이다.

따라서 $-2\le\displaystyle\int_{b}^{1}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}dx\le 2$이다.

문항카드 12. 논술전형 수학 오후 4번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열2(수학, 오후)/ 4번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 기하와 벡터
	핵심개념 및 용어	부등식의 영역, 벡터의 내적
예상 소요 시간	25분/전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[문제 4]

좌표평면 위의 영역 $C=\left\{(a,b)\,\middle|\,\frac{1}{\sqrt{2}}a+\frac{1}{\sqrt{2}}b\ge 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b\ge 0\right\}$가 있다. 영역 C에 있는 모든 점 (a,b)에 대하여 $ax+by\ge 0$을 만족시키는 점 (x,y)로 이루어진 영역을 D라 하자. 다음 물음에 답하시오.

[문제 4-1] 영역 D의 경계선을 구하시오.

[문제 4-2] 영역 $B=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$일 때, 두 영역 B, C의 공통부분의 넓이와 두 영역 B, D의 공통부분의 넓이의 합을 구하시오.

[문제 4-3] 영역 $C'=\{(a,b)|(\cos\theta)a+(\sin\theta)b\ge 0,(\cos\omega)a+(\sin\omega)b\ge 0\}$에 있는 모든 점 $(a,\,b)$에 대하여 $ax+by\ge 0$을 만족시키는 점 (x,y)로 이루어진 영역을 D'라 할 때, 영역 D'의 경계선을 구하시오. (단, $0<\theta<\omega<\frac{\pi}{2}$)

3. 출제 의도

고교 교육과정에서 중요하게 다루는 <수학Ⅰ>, <기하와 벡터> 과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 부등식의 영역, 벡터의 내적에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[수학Ⅰ] (다)도형의 방정식 5 부등식의 영역 ① 부등식의 영역의 의미를 이해한다.

	수학1351-3. 연립부등식의 영역을 나타낼 수 있다. [기하와 벡터] (나) 평면벡터 2 평면벡터의 성분과 내적 ② 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. 기벡1222. 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	이강섭 외	미래엔	2014	203～210
	수학 I	류희찬 외	천재교과서	2014	202～209
	기하와 벡터	이강섭 외	미래엔	2014	86～94
	기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2014	97～104

5. 문항 해설

[문제 4-1]

영역 C 를 표현하면 $\{(a,\,b)\,|\,b \geq -\sqrt{3}a,\ a \leq 0\} \cup \{(a,b)\,|\,b \geq -a,\ a \geq 0\}$이다. 경계선 위의 점 $(a,\,b) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$을 대입하고 $(a,\,b) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$을 대입하여 $ax + by \geq 0$을 만족하는 $(x,\,y)$는 $\frac{-1}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y \geq 0$과 $\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \geq 0$ 을 만족한다. 이러한 조건을 만족하는 $(x,\,y)$의 집합이 D 이다.

$D = \left\{(x,\,y)\,\middle|\,\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x,\ x \geq 0\right\}$이며 경계선은 $D_1 = \left\{(x,\,y)\,\middle|\,y = \frac{x}{\sqrt{3}},\ x \geq 0\right\}$ 과

$D_2 = \{(x,\,y)|y = x,\ x \geq 0\}$이다.

[문제 4-2]

영역 $B \cap D$가 나타내는 도형은 부채꼴이고, 이 부채꼴의 중심각의 크기는 $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$이다. 따라서 이 부채꼴의 반지름의 길이는 1이므로 영역 $B \cap D$의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{24}$

그리고 영역 $B \cap C$가 나타내는 도형은 부채꼴이고, 이 부채꼴의 중심각의 크기는 $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{12}$이다. 따라서 이 부채꼴의 반지름의 길이는 1이므로 영역 $B \cap C$의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \frac{11\pi}{12} = \frac{11\pi}{24}$이다.

따라서 구하는 답은 $\frac{\pi}{24} + \frac{11\pi}{24} = \frac{\pi}{2}$이다.

[문제 4-3번]

[문제 4-1] 과 같은 원리를 적용하면 경계선 $D_1{}' = \left\{(x,\,y)\,\middle|\,y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}x,\ x \geq 0\right\}$,

$D_2{}' = \left\{(x,\, y) \,\middle|\, y = \dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}x,\ \ x \ge 0\right\}$을 얻는다.