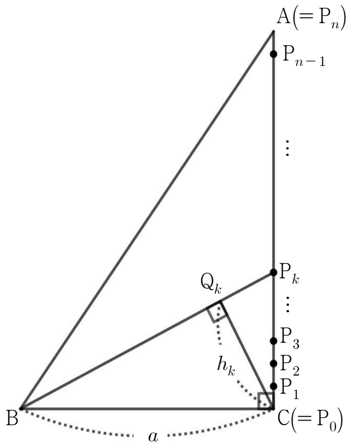
2020학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 자연계열1 (수학, 오전)

모집단위		수험번호		성 명	

[문제 1]

그림과 같이 $\overline{AC}=1$, $\overline{BC}=a$ $(a>0)$이고 $\angle BCA=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 자연수 n에 대하여 선분 CA를 n등분한 각 분점을 점 C에서 가까운 것부터 차례로 $P_0(=C)$, P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{n-1}, $P_n(=A)$이라 하자. $1 \le k \le n$인 자연수 k에 대하여 선분 BP_k에 내린 수선의 발을 Q_k라 하고, 선분 CQ_k의 길이를 h_k라 하자. h_k의 평균을 H_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} H_n$을 구하시오. **[10점]**



[문제 2]

급수 $1^2+m\times2^2+3^2+m\times4^2+5^2+m\times6^2+\cdots$ 에서 첫째항부터 제n번째 항까지의 부분합을 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 m의 형태를 나타내시오. **[10점]**

[제시문]

좌표평면에서 벡터 $\vec{a}$에 대한 다음의 두 명제 p_1, p_2가 있다.

p_1 : $\vec{a}+\vec{b}=\vec{v}$ 와 $|\vec{v}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}| \le 2|\vec{v}|$ 를 만족시키는 벡터 $\vec{b}$가 존재한다.

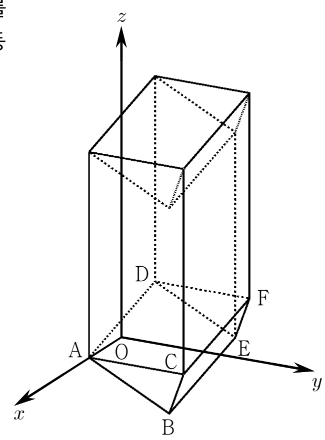
p_2 : $\vec{a}+\vec{b}=\vec{v}$ 와 $|\vec{a}|=m$, $|\vec{b}|=n$ 을 만족시키는 벡터 $\vec{b}$가 존재한다. (단, m과 n은 $0<m<n$인 상수이다.)

[문제 3-1] 벡터 $\vec{v}=(c,0)$일 때, 명제 p_1을 만족시키는 위치벡터 $\vec{a}$의 종점이 이루는 도형을 c를 이용하여 나타내시오. (단, c는 양의 실수이다.) **[10점]**

[문제 3-2] 명제 p_2를 만족시키는 벡터 $\vec{a}$의 집합을 S라고 할 때, 집합 S의 원소의 개수가 2가 되는 벡터 $\vec{v}$의 조건을 m과 n을 사용하여 나타내시오. **[10점]**

[제시문]

그림과 같이 좌표공간에서 $A(1,0,0)$, $B(0,1,-2)$, $C(1,2,0)$, $D(-1,0,1)$, $E(-2,1,-1)$, $F(-1,2,1)$를 꼭짓점으로 하는 삼각기둥 ABC$-$DEF를 z축의 방향으로 6만큼 평행이동하는 동안 삼각기둥 ABC$-$DEF가 그리는 다면체를 V라 하자. 다음 물음에 답하시오.



[문제 4-1] 다면체 V와 평면 $z=3$이 만나서 생기는 단면의 모양과 넓이를 구하시오. **[10점]**

[문제 4-2] 다면체 V의 부피를 구하시오. **[10점]**

2020학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 자연계열2 (수학, 오후)

모집단위		수험번호		성 명	

[문제 1]

합성함수가 정의될 수 있는 범위에서 함수 $f(x)$에 대한 합성함수를 다음과 같이 나타내자.

$(f \circ f)(x) = f^{<2>}(x)$, $(f \circ f \circ f)(x) = f^{<3>}(x)$, $\cdots$, $(\underbrace{f \circ f \circ \ \cdots \ \circ f}_{n})(x) = f^{<n>}(x)$

편의상 $f^{<i>}(x)$를 $f^{<i>}$라 하고, $f^{<0>} = x$라 하자.

함수 $f(x) = \ln(x)$라 할 때, 부정적분 $\displaystyle\int \frac{f^{<n>}}{f^{<0>} f^{<1>} f^{<2>} \cdots f^{<n-2>}} dx$ 를 $f^{<i>}$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$로 나타내고, 그 이유를 설명하시오. (단, $n \geq 2$인 자연수이다.) **[10점]**

[문제 2]

좌표평면 위에 원 $C : (x-a)^2 + y^2 = 1$이 있다. 원점 O에서 원 C에 그은 두 접선이 원과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자. 원점 O를 지나는 임의의 직선이 원 C와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 이 두 점의 중점을 M이라 하자. 두 점 P, Q를 포함하여 점 M이 나타내는 도형을 곡선 L이라 하자. $\angle \mathrm{POQ} = \theta$일 때, 곡선 L의 길이 l을 θ를 이용하여 나타내고, $\displaystyle\lim_{\theta \to 0+} l$의 값을 구하시오. (단, $a > 1$인 실수이다.) **[10점]**

[문제 3]

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\displaystyle I = \int_{-1}^{-b} \frac{f(a+x)}{x} dx + \int_{b}^{1} \frac{f(a+x)}{x} dx$ (단, a와 b는 실수이고, $0 < b < 1$ 이다.)라 하자.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)$의 도함수가 $|f'(x)| \leq 1$을 만족시킬 때, a와 b의 값에 관계없이 $|I| \leq 2$ 임을 보이시오. **[20점]**

[제시문]

좌표평면 위의 영역 $C = \left\{(a,b) \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{\sqrt{2}}b \geq 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b \geq 0 \right\}$가 있다. 영역 C에 있는 모든 점 (a,b)에 대하여 $ax + by \geq 0$을 만족시키는 점 (x,y)로 이루어진 영역을 D라 하자. 다음 물음에 답하시오.

[문제 4-1] 영역 D의 경계선을 구하시오. **[7점]**

[문제 4-2] 영역 $B = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$일 때, 두 영역 B, C의 공통부분의 넓이와 두 영역 B, D의 공통부분의 넓이의 합을 구하시오. **[7점]**

[문제 4-3] 영역 $C' = \{(a,b) \,|\, (\cos\theta)a + (\sin\theta)b \geq 0,\ (\cos\omega)a + (\sin\omega)b \geq 0\}$에 있는 모든 점 (a,b)에 대하여 $ax + by \geq 0$을 만족시키는 점 (x,y)로 이루어진 영역을 D'라 할 때, 영역 D'의 경계선을 구하시오. (단, $0 < \theta < \omega < \frac{\pi}{2}$) **[6점]**