2017학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제(수학)

모집단위		수험번호		성 명	

※다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

[제시문 1]

[가] 다항함수 $h(x)$의 그래프 위의 점 $(a, h(a))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y = h'(a)(x-a) + h(a)$$

[나] 다항함수 $h(x)$가

$$h(x) = (x-a)^n g(x) \text{ (단, } n\text{은 자연수이고, } g(x)\text{는 다항함수이다.)}$$

로 나타내어질 때, 방정식 $h(x)=0$은 $x=a$를 근으로 갖는다고 한다.
특히, $n \geq 2$이면 방정식 $h(x)=0$은 $x=a$에서 중근을 갖는다고 한다.

[1-1] 곡선 $y=x^3+1$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식을 구하시오. [4점]

[1-2] 다항함수 $f(x)$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=L(x)$라 할 때, 방정식 $f(x)-L(x)=0$이 $x=a$에서 중근을 가짐을 보이시오. [8점]

[1-3] 다항함수 $f(x)$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$를 지나는 직선을 $y=l(x)$라 하자. 방정식 $f(x)-l(x)=0$이 $x=a$에서 중근을 가질 때, 직선 $y=l(x)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선임을 보이시오. [8점]

[제시문 2]

[가] 좌표평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 C 위의 점 $(\cos\theta, \sin\theta)$에서의 접선을 l_θ라 할 때, 집합 A를 $A=\{l_\theta \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$라 하자.

[나] 좌표평면 위의 점 P가 집합 A의 원소 중 오직 m개의 원소와 만나도록 하는 점 P의 집합을 U_m이라 하자. 예를 들어, 집합 U_0은 집합 A의 어떤 원소와도 만나지 않는 점의 집합이다. (단, m은 음이 아닌 정수이다.)

[다] 좌표평면 위의 점 (a, b)가 집합 U_2의 원소일 때, 점 (a, b)를 지나는 원 C 위의 서로 다른 두 접선의 접점을 이은 직선을 $L(a, b)$라 하자.

[2-1] 음이 아닌 정수 m에 대하여 집합 U_m을 구하시오. [10점]

[2-2] 집합 B를 $B=\{L(a, b) \mid a^2+b^2=10^2,\ (a,b)\in U_2\}$라 하자. 좌표평면 위의 점 P가 집합 B의 원소 중 오직 m개의 원소와 만나도록 하는 점 P의 집합 V_m을 구하시오. (단, m은 음이 아닌 정수이다.) [10점]

[제시문 3]

세 함수 $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$가 모든 실수 x에 대하여
$p(x) \le q(x) \le r(x)$이고, $\lim_{x \to a} p(x) = \lim_{x \to a} r(x) = \alpha$ 이면 $\lim_{x \to a} q(x) = \alpha$이다. (단, α는 실수이다.)

[3-1] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 $f(1) = k$이고, $\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{2^n}\right) = f(0)$을 만족시킨다. 모든 자연수 n에 대하여

$f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$일 때, $f(0)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [8점]

[3-2] 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \ge 0$인 함수 $g(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $g(x_1) \le g(x_2)$이다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $g\left(\frac{1}{2^n}\right) \le \frac{n}{2(n+1)} \cdot g\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$이다.

[3-2-1] $g(0)$의 값을 구하시오. [4점]

[3-2-2] $\lim_{m \to \infty} \frac{g\left(\frac{1}{m}\right) - g(0)}{\frac{1}{m}}$ 의 값을 구하시오. (단, m은 자연수이다.) [8점]