한양대학교 2024학년도 논술전형

자 연 계 열 (오후 1)

성명		지원 학부 · 학과		수험 번호									

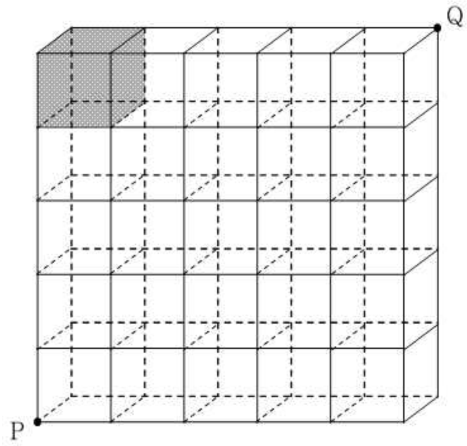
유의 사항

1. 90분 안에 답안을 작성하시오.
2. 답안지는 검정색 펜(샤프, 볼펜, 연필)으로 작성하시오.
3. 답안지와 문제지, 연습지를 함께 제출하시오.
4. 다음 경우는 0점 처리됩니다.
   1) 답안지를 검정색 펜(샤프, 볼펜, 연필)으로 작성하지 않은 경우
   2) 자신의 신원을 드러내는 표기나 표현을 한 경우
   3) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우

※ 감독의 지시가 있을 때까지 다음 장으로 넘기지 마시오.

[문제 1] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 오른쪽 그림은 크기가 같은 정육면체 25개를 가로로 5개, 세로로 5개씩 쌓아 만든 직육면체이다. 정육면체의 모서리를 따라 꼭짓점 P에서 꼭짓점 Q까지 최단거리로 이동할 때, 색칠된 정육면체의 꼭짓점을 지나지 않고 이동하는 경우의 수를 구하시오.



2. 주머니 A에는 숫자 4가 적힌 공이 세 개, 숫자 6이 적힌 공이 두 개, 숫자 8이 적힌 공이 한 개 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 0이 적힌 공이 여섯 개, 숫자 1이 적힌 공이 네 개 들어 있다. 주머니 A에서 한 개의 공을 임의로 꺼낼 때 공에 적힌 수를 a, 주머니 B에서 한 개의 공을 임의로 꺼낼 때 공에 적힌 수를 b라 하자. 곡선 $y=(x+7)(x^2-abx+\frac{a}{2}-6)$이 x축과 만나는 세 점 중에서 가장 가까운 두 점 사이의 거리를 확률변수 X라 할 때, X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 구하시오.

3. $0<x<\frac{\pi}{2}$ **에서 정의된 함수** $f(x)=\frac{1}{\sin^2 2x}$ **에 대하여 두 함수** $g(x)$**와** $h(x)$**를**

$$g(x)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{x} f(t)\,dt,\qquad h(x)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{x} g(t)\,dt \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

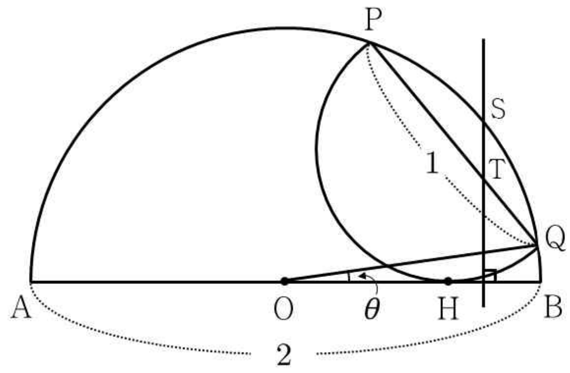
라 하자. 극한값 $\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)+\{g(x)\}^2}{f(x)}$ **을 구하시오. (단,** $\lim_{t\to 0+} t^2\ln t=0$ **이다.)**

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

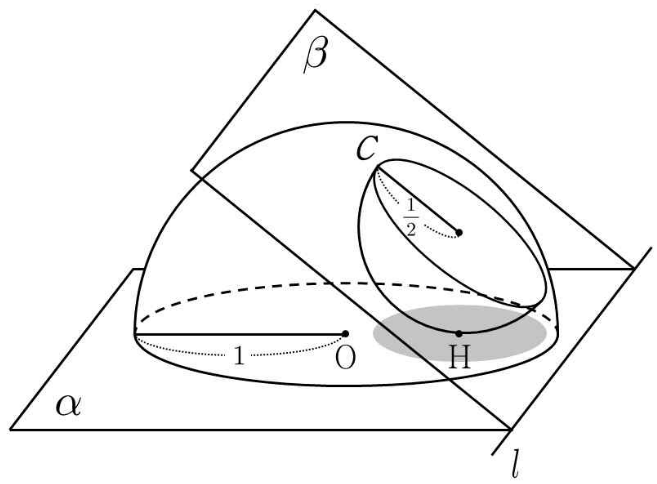
<가> 오른쪽 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 $\overline{QB} < \overline{PB}$ 이고 $\overline{PQ} = 1$ 인 두 점 P, Q가 있다. 이 반원 안에 선분 PQ를 지름으로 하고 선분 AB와 점 H에서 접하는 반원이 있다.

(1) 선분 AB의 중점을 O라 할 때, $\angle BOQ = \theta$ 라 하자. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

(2) 선분 PQ 위의 점 T에 대하여 점 T를 지나고 선분 AB와 수직인 직선이 호 AB와 만나는 점을 S라 하자.



<나> 오른쪽 그림과 같이 평면 α와 평면 β는 직선 l에서 만난다. 평면 α 위에 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 이 원을 밑면으로 하는 반구와 평면 β가 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 원 C이다. 원 C를 밑면으로 하는 반구는 평면 α와 한 점 H에서만 만난다.



1. 제시문 <가>에서 주어진 각의 크기 θ에 대하여, $\cos\theta$와 $\sin\theta$의 값을 구하시오.

2. 제시문 <가>에서 주어진 두 점 S와 T에 대하여, 선분 ST의 길이의 최댓값을 구하시오.

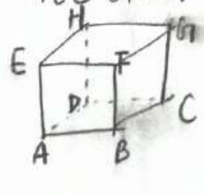
3. 제시문 <나>에서 주어진 원 C의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 구하시오.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 전체 경우의 수는 가로 모서리 5개, 세로 모서리 5개, 높이 1개로

$\frac{11!}{5!5!1!}$ 이다. (모서리들 중 어느 순서로 이동할지 순서 배치) $\left(\frac{11!}{5!5!1!}=2772\right)$

색칠된 정육면체의 각각 꼭짓점을 ABCDEFGH라 할 때, (그림1과 같이)



E를 지나려면 A를 반드시 지나야 하고,
F를 지나려면 E나 B를 반드시 지나야하고,
H를 지나려면 E나 D를 반드시 지나야하고,
G를 지나려면 H나 F나 C를 반드시 지나야한다.

P에서 B,C,D를 지나지 않고 A까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는 1가지이고,
A에서 Q까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는 $\frac{7!}{5!1!1!}$ 가지이다.
∴ P에서 B,C,D를 지나지 않고 A로 이동 후 A에서 Q까지 가는 경우의 수는
$1\times\frac{7!}{5!1!1!}=42$ 가지이다.

T.S.(ω) P에서 A,C,D를 지나지 않고 B로 이동 후 B에서 Q까지 가는 경우의 수는

$4\times\frac{6!}{4!1!1!}=120$ 가지이다.

P에서 A,B,D를 지나지 않고 C로 이동 후 C에서 Q까지 가는 경우의 수는
$20\times\frac{5!}{4!1!}=100$ 가지이다

P에서 A,B,C를 지나지 않고 D로 이동 후 D에서 Q까지 가는 경우의 수는
$4\times\frac{6!}{5!1!}=24$ 가지이다.

∴ (전체) − (색칠된 정육면체의 꼭짓점을 지나는 경우의 수)
$=2772-(42+120+100+24)=2486$ $\boxed{2486}$

2. case 별로 나누어 확률을 구하자.

i) $a=4, b=0$ 일 때, 나올확률은 $\frac{3}{6}\times\frac{6}{10}=\frac{3}{10}$ 이다.
$y=(x+7)(x^2-4)$ 가 x축과 만나는 세 점은 $(2,0),(-2,0),(-7,0)$ 이고
가장 가까운 두 점 사이의 거리는 4 이다.

T.S.(ω) ii) $a=4, b=1$ 일 때, 나올확률은 $\frac{1}{5}$ 이고,
가장 가까운 두 점 사이의 거리는 $4\sqrt{2}$ 이다.
iii) $a=6, b=0$ 일 때, 나올확률은 $\frac{1}{5}$ 이고,
가장 가까운 두 점 사이의 거리는 $2\sqrt{3}$ 이다.
iv) $a=6, b=1$ 일 때, 나올 확률은 $\frac{2}{15}$ 이고,
가장 가까운 두 점 사이의 거리는 $(10-2\sqrt{3})$ 이다.
v) $a=8, b=0$ 일 때, 나올 확률은 $\frac{1}{15}$ 이고, 가장 가까운 두 점 사이의 거리는 $2\sqrt{2}$ 이다.
vi) $a=8, b=1$ 일 때, 나올확률은 $\frac{1}{15}$ 이고, 가장 가까운 두 점 사이의 거리는 $(11-3\sqrt{2})$ 이다.

∴ X의 기댓값 E(X)는

$$\frac{3}{10}\times4+\frac{1}{5}\times4\sqrt{2}+\frac{1}{5}\times2\sqrt{3}+\frac{2}{15}\times(10-2\sqrt{3})+\frac{1}{15}\times2\sqrt{2}+\frac{1}{15}\times(11-3\sqrt{2})$$

$=\boxed{\frac{49+12\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{15}}$ 이다.

3. $g(x)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{x}\frac{1}{\sin^2 2t}dt=\left[-\frac{1}{2}\cot 2t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{x}=-\frac{1}{2}\cot 2x+\frac{1}{2\sqrt{3}}$ ⋯①

$h(x)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{x}\left(-\frac{1}{2}\cot 2t+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)dt=-\frac{1}{4}\left[\ln\sin 2t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{x}+\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{x}$

$=-\frac{1}{4}\ln\sin 2x+\frac{1}{2\sqrt{3}}x+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$ ⋯②

$$\lim_{x\to0+}\frac{h(x)+\{g(x)\}^2}{f(x)}=\lim_{x\to0+}\sin^2 2x\left[-\frac{1}{4}\ln\sin 2x+\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{3}}x+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12\sqrt{3}}}+\{g(x)\}^2\right]$$

$\frac{1}{2\sqrt{3}}x+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12\sqrt{3}}=k(x)$라 하자.

$$\lim_{x\to0+}\left\{\sin^2 2x\left(-\frac{1}{4}\ln\sin 2x\right)+\sin^2 2x\cdot k(x)+\sin^2 2x\left(-\frac{1}{2}\cot 2x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2\right\}$$

$\lim_{x\to0+}-\frac{1}{4}\sin^2 2x\ln\sin 2x=0$, $\lim_{x\to0+}\sin^2 2x\,k(x)=0$ 이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{h(x)+\{g(x)\}^2}{f(x)}=\lim_{x\to0+}\underline{\sin^2 2x\left(-\frac{1}{2}\cot 2x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{1}{4}$$ ⋯

따라서 답은 $\boxed{\frac{1}{4}}$ 이다.

$\left(\because \sin^2 2x\left(\frac{1}{4}\cot^2 2x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cot 2x+\frac{1}{12}\right)\right.$
$=\frac{\sin^2 2x}{4\tan^2 2x}+\sin^2 2x\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\cot 2x+\frac{1}{12}\right)$ 이고,
$\lim_{x\to0+}\frac{\sin^2 2x}{4\tan^2 2x}=\frac{1}{4}$, $\lim_{x\to0+}\sin^2 2x\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\cot 2x+\frac{1}{12}\right)=0$ 이다.$\left.\right)$

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 반지름의 길이는 1이다.
$\overline{OP}=\overline{OQ}=1$ 따라서 $\triangle OPQ$는 정삼각형이다. O에서 $\overline{PQ}$에 수선의 발을 내려 그 점을 K라 할 때 $\triangle OPQ$가 정삼각형이기 때문에 $\angle KOP=\angle KOQ=\frac{\pi}{6}$ 선분 PQ를 지름으로 하고 선분 AB와 점 H에서 접하는 반원에 대하여 이 반원의 중심을 O'라 할 때 $\overline{O'H}\perp\overline{AB}$이다.

$\triangle OO'H$에서 $\overline{O'H}$는 선분 PQ를 지름으로 하는 반원의 반지름의 길이와 동일함으로 $\frac{1}{2}$이다

$\overline{OO'}$는 $\triangle OPO'$에서 $\overline{OP}^2=\overline{OO'}^2+\overline{O'P}^2=1=\overline{OO'}^2+\frac{1}{4}$

$\overline{OO'}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\triangle OO'H$에서 $\overline{OO'}^2=\overline{O'H}^2+\overline{OH}^2=\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\overline{OH}^2$

$\overline{OH}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{\sqrt{3}}=\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}$

$\cos(\theta+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$3\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta=2\sqrt{2}$

$4\cos\theta=2\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}$ $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$

$\frac{\sqrt{6}+1}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sin\theta=\frac{3-\sqrt{6}}{6}$ $\sin\theta=\frac{3-\sqrt{6}}{6}$, $\cos\theta=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$

2. 점 O (0,0) 이라 할 때. 선분 AB를 지름으로 하는 원의 방정식은 $x^2+y^2=1$ 이다. 점 P의 좌표는 $(\cos(\theta+\frac{\pi}{3}),\sin(\theta+\frac{\pi}{3}))$이고 점 Q의 좌표는 $(\cos\theta,\sin\theta)$이다 직선 PQ의 식은 $y=\frac{\sin\theta-\sin(\theta+\frac{\pi}{3})}{\cos\theta-\cos(\theta+\frac{\pi}{3})}(x-\cos\theta)+\sin\theta$

$y=\frac{\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}(x-\cos\theta)+\sin\theta=-\sqrt{2}(x-\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6})+\frac{3-\sqrt{6}}{6}$

$=-\sqrt{2}x+\frac{3}{2}$

점 T는 이 직선위의 점이고 점 S는 $x^2+y^2=1$ 위의 점이다.
$(\cos(\theta+\frac{\pi}{3})\le t\le\cos\theta)$
$x=t$일 때 점 T는 $(t,-\sqrt{2}t+\frac{3}{2})$ 점 S는 $(t,\sqrt{1-t^2})$이다.

$\sqrt{1-t^2}+\sqrt{2}t-\frac{3}{2}=\ell(t)$라 할 때 $\ell(t)$는 선분 ST의 길이이다.

$\ell'(t)=\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}+\sqrt{2}$.

	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cdots$
$\ell'(t)$	+	0	−
$\ell(t)$	↗		↘

$\cos(\theta+\frac{\pi}{3})\le\sqrt{\frac{2}{3}}\le\cos\theta$ 임으로

$\ell(t)$는 $t=\sqrt{\frac{2}{3}}$에서 최댓값 $\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{2}}{2}$을 갖는다.

3. 평면 α와 평면 β의 이면각은 $\overline{PQ}$와 $\overline{AB}$가 이루는 각과 동일하다.

위 그림 첫번째 그림에서 AB와 평행하고 점Q를 지나는 직선을 그었을 때 선분AB를 지름으로 하는 반원과 만나는 점을 점 Q'라 하자 $\angle QQ'A=\angle QOB=\theta$임으로

평면 α와 평면 β의 이면각은 $\frac{\pi}{3}-\theta$이다.

원 C의 평면 α위로의 정사영의 넓이는

(원C의 넓이) × cos (이면각) 이기에

$\frac{\pi}{4}\times\cos(\frac{\pi}{3}-\theta)=\frac{\pi}{4}\times(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta)$

$=\frac{\pi}{4}(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{12}+\frac{3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{12})$

$=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$.