한양대학교 2024학년도 신입학전형 수시

자 연 계 | **논 술 예 시 답 안** | 오전-1번

1. $a_n = ar^{n-1}$ $(-1 < r < 1)$이라고 하면 $|a_n| = |a||r|^{n-1}$, $a_{2n} = ar^{2n-1} = ar \times r^{2(n-1)}$이다. 그러므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{ar}{1-r^2} = -4, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \frac{|a|}{1-|r|} = 20\text{이다.}$$

(경우 1) $a > 0,\ 0 < r < 1$이면, $-4 = \dfrac{ar}{1-r^2} = \dfrac{a}{1-r}\dfrac{r}{1+r} = \dfrac{20r}{1+r} \Rightarrow 5r = -(1+r) \Rightarrow r = -\dfrac{1}{6} < 0$이다. 따라서 모순이다.

(경우 2) $a > 0,\ -1 < r < 0$이면, $-4 = \dfrac{ar}{1-r^2} = \dfrac{a}{1+r}\dfrac{r}{1-r} = \dfrac{20r}{1-r} \Rightarrow 5r = -(1-r) \Rightarrow r = -\dfrac{1}{4}$이고 $a = 20(1+r) = 15$

(경우 3) $a < 0,\ 0 < r < 1$이면, $-4 = \dfrac{ar}{1-r^2} = \dfrac{-a}{1-r}\dfrac{-r}{1+r} = -\dfrac{20r}{1+r} \Rightarrow 5r = 1+r \Rightarrow r = \dfrac{1}{4}$이고 $a = -20(1-r) = -15$

(경우 4) $a < 0,\ -1 < r < 0$이면, $-4 = \dfrac{ar}{1-r^2} = \dfrac{-a}{1+r}\dfrac{-r}{1-r} = -\dfrac{20r}{1-r} \Rightarrow 5r = 1-r \Rightarrow r = \dfrac{1}{6} > 0$이다. 따라서 모순이다.

(참고) $ar = -4(1-r^2) < 0$임을 이용하여 (경우 2)와 (경우 3)만 바로 고려할 수 있다.

한편, $a_{4n-1} = ar^{4n-2} = ar^2 \times r^{4(n-1)}$이므로 $l = \sum_{n=1}^{\infty} a_{4n-1}$이라 하면 $l = \dfrac{ar^2}{1-r^4}$

$$(a,r) = \left(15, -\frac{1}{4}\right)\text{이면 } l = \frac{15 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^2}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^4} = \frac{\frac{15}{4^2}}{\frac{4^4 - 1^4}{4^4}} = \frac{15 \times 16}{(16+1)(16-1)} = \frac{16}{17},$$

$$(a,r) = \left(-15, \frac{1}{4}\right)\text{이면 } l = \frac{-15 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^4} = \frac{-\frac{15}{4^2}}{\frac{4^4 - 1^4}{4^4}} = \frac{-15 \times 16}{(16+1)(16-1)} = -\frac{16}{17}$$

따라서 l이 될 수 있는 모든 값은 $\dfrac{16}{17}, -\dfrac{16}{17}$

2. $\alpha = 0$이면 $0 = \int_0^{\alpha} |f(x)|dx = \dfrac{50}{3}$이므로 모순이다.

$\alpha < 0$이면 $\int_0^{\alpha} |f(x)|dx = -\int_{\alpha}^{0} |f(x)|dx$이고 $\int_{\alpha}^{0} |f(x)|dx$은 곡선 $y = |f(x)|$과 x축 및 두 직선 $x = \alpha$, $x = 0$으로 둘러싸인 부분의 넓이이므로 양수이다. $\dfrac{50}{3} = \int_0^{\alpha} |f(x)|dx < 0$이므로 모순이다.

따라서 $0 < \alpha < \beta$이고 $f(x) = x^2 + px + q$라 하면 $q = \alpha\beta > 0$이다. $y = h(x)$를 곡선 $y = |f(x)|$ 위의 점 $(6, |f(6)|)$에서의 접선의 방정식이라 하자. $f(6) > 0$이라 하면,

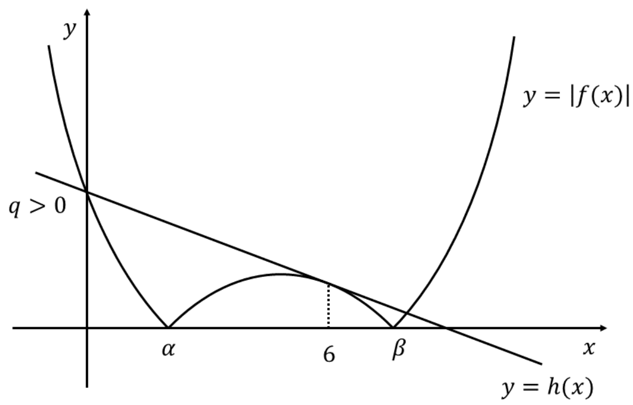
$h(x) = f'(6)(x-6) + f(6) = (12+p)(x-6) + (36+6p+q)$

$h(0) = -6(12+p) + (36+6p+q) = q - 36$

제시문에 의해 $h(0) = |f(0)| = q$이므로 $q - 36 = q$이지만, 이를 만족시키는 q는 없으므로 $f(6) > 0$이 될 수 없다. 또한 함수 $|f(x)|$가 $x = 6$에서 미분가능하므로 $f(6) \neq 0$이다. 따라서 $f(6) < 0$이고,

$h(x) = -f'(6)(x-6) - f(6) = -(12+p)(x-6) - (36+6p+q)$

$h(0) = 6(12+p) - (36+6p+q) = 36 - q = q$, 즉, $q = 18$



한편, 이차 방정식의 근과 계수의 관계로부터 $p = -(\alpha+\beta)$, $18 = q = \alpha\beta$이다.

따라서 $p = -\left(\alpha + \dfrac{18}{\alpha}\right)$이고 $\alpha^2 < \alpha\beta = 18$, 즉, $0 < \alpha < 3\sqrt{2}$

또한 $f(6) < 0$이므로 $0 < \alpha < 6 < \beta$이고 구간 $[0, \alpha)$에서 $|f(x)| = f(x) > 0$

$$\int_0^{\alpha} |f(x)| = \int_0^{\alpha} f(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}px^2 + qx\right]_0^{\alpha} = \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{2}p\alpha^2 + q\alpha = \frac{50}{3} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠의 양변에 6을 곱하면 $2\alpha^3 + 3p\alpha^2 + 6q\alpha = 100$

$q = 18$, $p = -\left(\alpha + \dfrac{18}{\alpha}\right)$이므로 $2\alpha^3 - 3\alpha^2\left(\alpha + \dfrac{18}{\alpha}\right) + 108\alpha = 2\alpha^3 - 3\alpha^3 - 54\alpha + 108\alpha = -\alpha^3 + 54\alpha = 100$

이를 정리하면 $\alpha^3 - 54\alpha + 100 = (\alpha - 2)(\alpha^2 + 2\alpha - 50) = 0$이다. 따라서 $\alpha = 2, -1-\sqrt{51}, -1+\sqrt{51}$

그런데 $-1-\sqrt{51} < 0$이고 $-1+\sqrt{51} > 3\sqrt{2}$이므로 $\alpha = 2$이다. 그러므로 $\alpha = 2$, $\beta = 9$이고 $p = -(2+9) = -11$

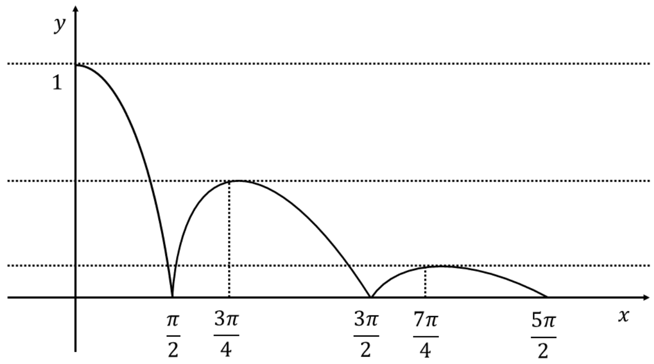
$f(x) = x^2 - 11x + 18$이므로 $f(10) = 8$

3. 함수 $P(x)$를 $P(x)=e^{-x}\cos x$라 하면 $P'(x)=-e^{-x}(\cos x+\sin x)$

$0<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$라 하면, $P'(x)=0 \Leftrightarrow \cos x+\sin x=\cos x(1+\tan x)=0 \Leftrightarrow \tan x=-1$

$x=\frac{3\pi}{4}$일 때 $\tan x=-1$이므로 함수 $P(x)$는 $x=\frac{3\pi}{4}$에서 극솟값을 갖고 $P\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-\pi}$이다. 그러므로 함수 $g(x)=|P(x)|$는

$x=\frac{3\pi}{4}$에서 극댓값을 갖고 $g\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-\pi}$



$\frac{3\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{2}$라 하면, 함수 $g(x)=|P(x)|$는 $x=\frac{7\pi}{4}$에서 극댓값을 갖고

$g\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-2\pi}<g\left(\frac{3\pi}{4}\right)$이다. 따라서 $b_1=g\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-\pi}$

$\frac{5\pi}{2}<x<\frac{7\pi}{2}$라 하면, 함수 $g(x)=|P(x)|$는 $x=\frac{11\pi}{4}$에서 극댓값을 갖고

$g\left(\frac{11\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-3\pi}<g\left(\frac{7\pi}{4}\right)$이다. 따라서 $b_2=g\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-2\pi}$

함수 $y=\tan x$가 주기 π인 주기함수이므로 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-\pi}$이고 공비가 $e^{-\pi}$인 등비수열이다. $0<e^{-\pi}<1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}\times\frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}(e^{\pi}-1)}$$

한양대학교 2024학년도 신입학전형 수시

자 연 계	논 술 예 시 답 안	오전-2번

1. k는 $\frac{1}{4}$의 확률로 $1,2,3,4$중 하나의 값을 갖는다. 한편 $l=1,2,3,4$일 때, l의 값을 확률변수 L이라 하면, $\mathrm{P}(L=l)$은 7개의 공에서 5가 적힌 공을 l개, 6이 적힌 공을 $4-l$개 임의로 동시에 꺼내는 경우의 수를 7개의 공에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수로 나눈 값으로 $\mathrm{P}(L=l)=\frac{{}_4\mathrm{C}_l\times{}_3\mathrm{C}_{4-l}}{{}_7\mathrm{C}_4}$이다. 확률변수 L의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

L	1	2	3	4
$\mathrm{P}(L=l)$	$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_4}=\frac{4}{35}$	$\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_4}=\frac{18}{35}$	$\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_4}=\frac{12}{35}$	$\frac{{}_4\mathrm{C}_4\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_4}=\frac{1}{35}$

앞선 결과로부터 확률변수 W의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

W	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	3	4
(k,l)	$(1,4)$	$(1,3)$	$(1,2)$, $(2,4)$	$(2,3)$	$(3,4)$	$(1,1),(2,2)$, $(3,3),(4,4)$	$(4,3)$	$(3,2)$	$(2,1)$, $(4,2)$	$(3,1)$	$(4,1)$
$\mathrm{P}(W=w)$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{35}=\frac{1}{140}$	$\frac{1}{4}\times\frac{12}{35}=\frac{12}{140}$	$\frac{1}{4}\times\left(\frac{18+1}{35}\right)=\frac{19}{140}$	$\frac{1}{4}\times\frac{12}{35}=\frac{12}{140}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{35}=\frac{1}{140}$	$\frac{1}{4}\times\left(\frac{4+12+18+1}{35}\right)=\frac{35}{140}$	$\frac{1}{4}\times\frac{12}{35}=\frac{12}{140}$	$\frac{1}{4}\times\frac{18}{35}=\frac{18}{140}$	$\frac{1}{4}\times\left(\frac{4+18}{35}\right)=\frac{22}{140}$	$\frac{1}{4}\times\frac{4}{35}=\frac{4}{140}$	$\frac{1}{4}\times\frac{4}{35}=\frac{4}{140}$

앞선 표로부터 확률변수 W의 기댓값은 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(W)=\frac{1}{140}\left(1\times\frac{1}{4}+12\times\frac{1}{3}+19\times\frac{1}{2}+12\times\frac{2}{3}+1\times\frac{3}{4}+35\times1+12\times\frac{4}{3}+18\times\frac{3}{2}+22\times2+4\times3+4\times4\right)=\frac{69}{56}$$

2. k,l에 대하여 점 A에서 점 B까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는 다음과 같다.

k \ l	1	2	3	4
1	$\frac{2!}{1!1!}=2$	$\frac{3!}{1!2!}=3$	$\frac{4!}{1!3!}=4$	$\frac{5!}{1!4!}=5$
2	$\frac{3!}{2!1!}=3$	$\frac{4!}{2!2!}=6$	$\frac{5!}{2!3!}=10$	$\frac{6!}{2!4!}=15$
3	$\frac{4!}{3!1!}=4$	$\frac{5!}{3!2!}=10$	$\frac{6!}{3!3!}=20$	$\frac{7!}{3!4!}=35$
4	$\frac{5!}{4!1!}=5$	$\frac{6!}{4!2!}=15$	$\frac{7!}{4!3!}=35$	$\frac{8!}{4!4!}=70$

그리고 k,l에 대하여 확률변수 U의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

U	2	3	4	5	6	10	15	20	35	70
(k,l)	$(1,1)$	$(1,2)$, $(2,1)$	$(1,3)$, $(3,1)$	$(1,4)$, $(4,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$, $(3,2)$	$(2,4)$, $(4,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$, $(4,3)$	$(4,4)$
$\mathrm{P}(U=u)$	$\frac{1}{4}\times\frac{4}{35}=\frac{4}{140}$	$\frac{1}{4}\left(\frac{4}{35}+\frac{18}{35}\right)=\frac{22}{140}$	$\frac{1}{4}\left(\frac{4}{35}+\frac{12}{35}\right)=\frac{16}{140}$	$\frac{1}{4}\left(\frac{4}{35}+\frac{1}{35}\right)=\frac{5}{140}$	$\frac{1}{4}\times\frac{18}{35}=\frac{18}{140}$	$\frac{1}{4}\left(\frac{18}{35}+\frac{12}{35}\right)=\frac{30}{140}$	$\frac{1}{4}\left(\frac{18}{35}+\frac{1}{35}\right)=\frac{19}{140}$	$\frac{1}{4}\times\frac{12}{35}=\frac{12}{140}$	$\frac{1}{4}\left(\frac{12}{35}+\frac{1}{35}\right)=\frac{13}{140}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{35}=\frac{1}{140}$

이를 근거로 하여 (k,l)이 $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)$ 일 때 $U\le10$을 만족함을 알 수 있다. 따라서

$$\mathrm{P}(U\le10)=\frac{4+4+18+4+12+4+1+18+18+12}{140}=\frac{4\times4+18\times3+12\times2+1\times1}{35\times4}=\frac{19}{28}$$ 이다.

3. $Y=-0.5X+5$ 이므로 $m=\mathrm{E}(Y)=-0.5\mathrm{E}(X)+5=0$, $\sigma=\sigma(Y)=|-0.5|\sigma(X)=2$ 이다.

표본평균을 $\overline{y}$ 라고 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 98.76% 의 신뢰구간은

$\overline{y}-2.5\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{y}+2.5\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이다. 여기서 $b-a=2\times2.5\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{5\sigma}{\sqrt{n}}$ 이므로

$1<\frac{5\sigma}{\sqrt{n}}$, $\sqrt{n}<10$, $n<100$ 가 성립한다.

모평균 m 에 대한 신뢰도 86.64% 의 신뢰구간은 $\overline{y}-1.5\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{y}+1.5\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이다.

$d-c=2\times1.5\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$ 이므로 $\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}<\frac{6}{5}$, $\sqrt{n}>5$, $n>25$ 가 성립한다.

따라서 두 부등식 $1<b-a$ 와 $d-c<\frac{6}{5}$ 를 만족시키는 자연수 n 의 최댓값과 최솟값은 각각 99와 26이다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

$a_n = ar^{n-1}$ 이라고 할 때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $-1<r<1$ 이다. $a_{2n} = ar^{2n-1}$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{ar}{1-r^2} = -4$ 이다.

이때 $r \neq 0$ 이다.

i) $a>0$, $r>0$ 일 때,

항상 $a_n>0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-r} = 20$ 이다.

$\frac{r}{1+r} \times \frac{a}{1-r} = -4$ 식을 풀면 $r=-\frac{1}{6}$, $a=\frac{70}{3}$ 이므로 모순이다

ii) $a>0$, $r<0$ 일 때, $|a_n|$은

$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots = a-ar+ar^2-ar^3+\cdots$ 이므로

공비가 $-r$이고 첫째항이 a인 등비수열이다

$\therefore \frac{a}{1+r} = 20$ 이고 $\frac{r}{1-r} \times \frac{a}{1+r} = -4$ 를 풀면

$r=-\frac{1}{4}$, $a=15$ 이다

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_{4n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 15 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{4n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} 240 \times \left(\frac{1}{256}\right)^n$

$= \frac{\frac{240}{256}}{1-\frac{1}{256}} = \frac{240}{255} = \frac{16}{17}$ 이다

iii) $a<0$, $r>0$ 일 때, $|a_n|$은

$-a-ar-ar^2$ 이고 첫째항이 $-a$, 공비가 r인 등비수열이다 $\therefore \frac{-a}{1-r} = 20$ 이고 $\frac{-r}{1+r} \times \frac{-a}{1-r} = -4$ 를 풀면

$r=\frac{1}{4}$ 이고 $a=-15$ 이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{4n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-15) \times \left(\frac{1}{4}\right)^{4n-2} = -\sum_{n=1}^{\infty} 240 \times \left(\frac{1}{256}\right)^n = -\frac{16}{17}$ 이다

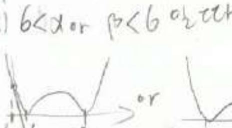
iv) $a<0$, $r<0$ 일 때, $|a_n|$은

$-a+ar-ar^2+ar^3-\cdots$ 이고 첫째항이 $-a$, 공비가 $-r$인 등비수열이다 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \frac{-a}{1+r} = 20$ 이고 $\frac{-r}{1-r} \times \frac{-a}{1+r} = -4$ 를 풀면, $r=\frac{1}{6}$, $a=-\frac{70}{3}$ 이므로 모순이다.

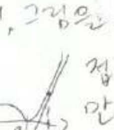
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_{4n-1}$ 의 합이 될수있는 수는 $\pm \frac{16}{17}$ 이다

2. $|f(x)|$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 미분가능하지 않다.
$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ 이고 $y=|f(x)|$ 위의점 $6, |f(6)|$ 에서의 접선의 y절편이 $|f(0)|$ 이기 위해서는

i) $6<\alpha$ or $\beta<6$ 일 때, 그림을 그려보면



or



접선은 $y=|f(x)|$와 $x=6$ 에서만 만나므로 모순이다.
따라서 $\alpha<6<\beta$ 이다.

$y=|f(x)|$ 의 $(6, |f(6)|)$ 에서의 접선을 그려보면 항상 세점에서 만나고 한점의 x좌표는 α보다 작고 한점은 β보다 크고 한점은 6이다. 그러므로 $0<\alpha$ 임을 알수 있다.

$\therefore \int_0^{\alpha} |f(x)|\,dx = \int_0^{\alpha} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \int_0^{\alpha} (x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)\,dx$

$= \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{\alpha+\beta}{2} \times \alpha^2 + \alpha^2\beta = \frac{50}{3}$

$\alpha<x<\beta$에서 $|f(x)| = -x^2+(\alpha+\beta)x$ 이고

$(|f(x)|)' = -2x+\alpha+\beta$ 이다, $(|f(6)|)' = -12+\alpha+\beta$ 이므로

$y=|f(x)|$ 의 $(6, |f(6)|)$ 위의 접선은 $y=(-12+\alpha+\beta)(x-6)-(6-\alpha)(6-\beta)$

$x=0$ 일때의 y값은 $36-\alpha\beta$ 이고 $f(0)=\alpha\beta$ 와 같다.

$\therefore \alpha\beta = 18$ 이다. $\frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{\alpha\beta}{2} \times \alpha + \alpha \times \alpha\beta = \frac{50}{3}$ 과 연립하면

$-\frac{1}{6}\alpha^3 - 9\alpha + 18\alpha = \frac{50}{3}$ 이고 α에 대한 삼차 방정식을 풀면 $\alpha = 2$ 또는 $\alpha = -1 \pm \sqrt{51}$ 이다. $\alpha<6$ 이므로

$\alpha = 2$ 이고 $\beta = 9$ 이다. $\therefore f(10) = (10-2)(10-9) = 8$ 이다.

3. $g(x) = \begin{cases} e^{-x}\cos x, & \cos x \geq 0 \\ -e^{-x}\cos x, & \cos x < 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ $g'(x) = \begin{cases} -(\cos x - \sin x)e^{-x}, & \cos x \geq 0 \\ (\cos x + \sin x)e^{-x}, & \cos x < 0 \end{cases}$

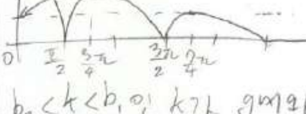
$g'(x)=0$ 에서 $x = \frac{4k+3}{4}$ (k는 $k \geq 0$인 정수)

$(0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $(\frac{7}{4}\pi, \frac{5}{2}\pi)$ ... 에서 $g'(x)<0$ 이고

$(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi)$, $(\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi)$, $(\frac{5}{2}\pi, \frac{11}{4}\pi)$ ... 에서 $g'(x)>0$ 이다,

$g(x)$의 극댓값은 $g(0)=1$, $g(\frac{3}{4}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}$, $g(\frac{7}{4}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{7}{4}\pi}$ 로

점점 작아짐을 알수 있다. 따라서 $g(x)$의 개형을 그리면



$g(x)$와 $y=k$가 만나는 점이 1개 이기 위한 k의 범위는 $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi} < k < 1$ 이다

$b_2<k<b_1$ 인 k가 $g(x)$와 3개의 점에서 만나기 위한 k의 범위는 $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{7}{4}\pi} < k < \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}$ 이고

$b_3<k<b_2$ 인 k가 $g(x)$와 5개의 점에서 만나기 위한 k의 범위는 $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{11}{4}\pi} < k < \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{7}{4}\pi}$ 이다

따라서 $b_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}$, $b_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{7}{4}\pi}$, ..., $b_n = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{4n-1}{4}}$ 임을 알수 있다. b_n은 첫째항이 $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}$ 이고 공비가 $e^{-\pi}$인 등비수열 이므로

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 합은 $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}}{1-e^{-\pi}} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{2(e^{\pi}-1)}$ 이다

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 파란상자에서 숫자 1, 2, 3, 4를 뽑을 확률은 각각 $\frac{1}{4}$이다.

빨간 상자에는 총 7개 중 4개를 뽑으니 ${}_7C_4$ 경우의 수가 있고

5가 1개, 6이 3개 뽑을 확률 $= \frac{{}_4C_1 \times {}_3C_3}{{}_7C_4} = \frac{4}{35}$

5가 2개, 6이 2개 뽑을 확률 $= \frac{{}_4C_2 \times {}_3C_2}{{}_7C_4} = \frac{18}{35}$

5가 3개, 6이 1개 뽑을 확률 $= \frac{{}_4C_3 \times {}_3C_1}{{}_7C_4} = \frac{12}{35}$

5가 4개, 6이 0개 뽑을 확률 $= \frac{{}_4C_4 \times {}_3C_0}{{}_7C_4} = \frac{1}{35}$ 이다.

$\frac{k}{l}$로 가능한 값은

$\frac{\frac{1}{1}}{\frac{3}{1}}, \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}, \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{3}}, \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}, \frac{\frac{2}{1}}{\frac{4}{1}}, \frac{\frac{2}{2}}{\frac{4}{2}}, \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}, \frac{\frac{2}{4}}{\frac{4}{4}}$ 가 있고

$\frac{k}{l} = 1$: $(k,l) = (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)$

$\frac{1}{2}$ $(1,2), (2,4)$

$\frac{1}{3}$ $(1,3)$

$\frac{1}{4}$ $(1,4)$

2 $(2,1), (4,2)$

$\frac{2}{3}$ $(2,3)$

3 $(3,1)$

$\frac{3}{2}$ $(3,2)$

$\frac{3}{4}$ $(3,4)$

4 $(4,1)$

$\frac{4}{3}$ $(4,3)$

$\frac{k}{l}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{2}{3}$	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	4	$\frac{4}{3}$
$P(W=\frac{k}{l})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{19}{140}$	$\frac{12}{140}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{22}{140}$	$\frac{12}{140}$	$\frac{4}{140}$	$\frac{18}{140}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{4}{140}$	$\frac{12}{140}$

$$E(W) = 1\times\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{19}{140} + \frac{1}{3}\times\frac{12}{140} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{140} + 2\times\frac{22}{140} + \frac{2}{3}\times\frac{12}{140}$$
$$+ 3\times\frac{4}{140} + \frac{3}{2}\times\frac{18}{140} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{140} + 4\times\frac{4}{140} + \frac{4}{3}\times\frac{12}{140}$$
$$= \frac{69}{56}$$

2. 가로길이 k, 세로길이 l A에서 B까지 최단거리 이동 경우의 수 $= \frac{(k+l)!}{k!\,l!}$

$(k,l) = (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4)$
$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)$

$V =$	2	3	4	5	6	10	15	20	35	70
	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(4,4)$
		$(2,1)$	$(3,1)$	$(4,1)$		$(3,2)$	$(4,2)$		$(4,3)$	

i	2	3	4	5	6	10	15	20	35	70
$P(V=i)$	$\frac{4}{140}$	$\frac{22}{140}$	$\frac{16}{140}$	$\frac{5}{140}$	$\frac{18}{140}$	$\frac{30}{140}$	$\frac{19}{140}$	$\frac{12}{140}$	$\frac{13}{140}$	$\frac{1}{140}$

$$P(V\le 10) = \frac{4}{140} + \frac{22}{140} + \frac{16}{140} + \frac{5}{140} + \frac{18}{140} + \frac{30}{140}$$
$$= \frac{95}{140} = \frac{19}{28}$$

3. X의 정규분포 $N(10, 4^2)$

$m = E(Y) = -0.5E(X) + 5 = -0.5\times 10 + 5 = 0$

$\sigma^2 = V(Y) = 0.5^2 V(X) = 0.5^2 \cdot 16 = 4$

Y의 정규분포 $N(0, 2^2)$

$Z = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-0}{2} = \frac{X}{2}$

$P(0 \le Z \le z) = P(0 \le \frac{X}{2} \le z)$

z	$P(0\le X\le z)$
1.0	0.6826
1.5	0.8664
2.0	0.9544
2.5	0.9876

신뢰도 98.76% 신뢰구간

$\bar{x} - 2.5\times\frac{2}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x} + 2.5\times\frac{2}{\sqrt{n}}$

$\Longleftrightarrow a \le m \le b$

$b - a = 5\times\frac{2}{\sqrt{n}}$

신뢰도 86.64% 신뢰구간

$\bar{x} - 1.5\times\frac{2}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x} + 1.5\times\frac{2}{\sqrt{n}}$

$\Longleftrightarrow c \le m \le d$

$d - c = 3\times\frac{2}{\sqrt{n}}$

$1 < \frac{10}{\sqrt{n}}$, $\frac{6}{\sqrt{n}} < \frac{6}{5}$ 만족하는 n

$25 < n < 100$ 최댓값 99, 최솟값 26