한양대학교 2023학년도 신입학전형 수시

상 경 계	**논 술 예 시 답 안**	2번

1. 주머니 A에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수에서 2를 뺀 수인 확률변수와 주머니 B에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수인 확률변수는 동일한 확률분포를 갖는다. 따라서 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내는 시행을 8번 할 때, 나온 수를 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8라 하면

$W=\dfrac{Z_1+Z_2+Z_3+Z_4+(Z_5-2)+(Z_6-2)+(Z_7-2)+(Z_8-2)}{8}=\dfrac{Z_1+Z_2+Z_3+Z_4+Z_5+Z_6+Z_7+Z_8}{8}-1$ 이다.

주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하자. X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

X의 평균과 분산은 $\mathrm{E}(X)=\dfrac{1\times2+2\times1+3\times1+4\times1+5\times2}{7}=3$,

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\dfrac{1^2\times2+2^2\times1+3^2\times1+4^2\times1+5^2\times2}{7}-3^2=\dfrac{18}{7}$ 이다.

$\overline{Z}=\dfrac{Z_1+Z_2+Z_3+Z_4+Z_5+Z_6+Z_7+Z_8}{8}$ 라고 하면 $\mathrm{E}(\overline{Z})=\mathrm{E}(X)=3$, $\mathrm{V}(\overline{Z})=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{8}=\dfrac{9}{28}$ 이다.

따라서 확률변수 W의 평균과 분산은 각각

$\mathrm{E}(W)=\mathrm{E}(\overline{Z}-1)=\mathrm{E}(\overline{Z})-1=2$, $\mathrm{V}(W)=\mathrm{V}(\overline{Z}-1)=\mathrm{V}(\overline{Z})=\dfrac{9}{28}$ 이다.

또한 $\mathrm{E}\left(\dfrac{5}{2}W-1\right)=4$, $\dfrac{2521}{\mathrm{V}(-28W+10)}=\dfrac{2521}{(-28)^2\mathrm{V}(W)}=\dfrac{2521}{252}$ 이므로 $4<n<\dfrac{2521}{252}$ 을 만족시키는 자연수 n은 5, 6, 7 8, 9 10이고 그 중 짝수인 자연수 n의 개수는 3이다.

답 : 평균 2, 분산 $\dfrac{9}{28}$, 3

2. 1번째 대국에서는 바둑기사가 이길 확률이 1이므로 2번째부터 5번째까지 대국 결과를 살펴보면 총 16가지의 경우가 있다. 대국 결과와 상금을 받는 횟수, 확률을 표로 정리하면 다음과 같다. 대국 결과에서 이기는 경우와 지는 경우는 각각 O와 X로 나타낸다.

대국 결과	상금을 받는 횟수	확률	대국 결과	상금을 받는 횟수	확률
OOOOO	4	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{120}$	OXOOO	2	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{120}$
OOOOX	3	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{120}$	OXOOX	1	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{120}$
OOOXO	2	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{120}$	OXOXO	0	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{120}$
OOOXX	2	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{120}$	OXOXX	0	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{120}$
OOXOO	2	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{120}$	OXXOO	1	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{120}$
OOXOX	1	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{120}$	OXXOX	0	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{120}$
OOXXO	1	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{6}{120}$	OXXXO	0	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{6}{120}$
OOXXX	1	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{120}$	OXXXX	0	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{120}$

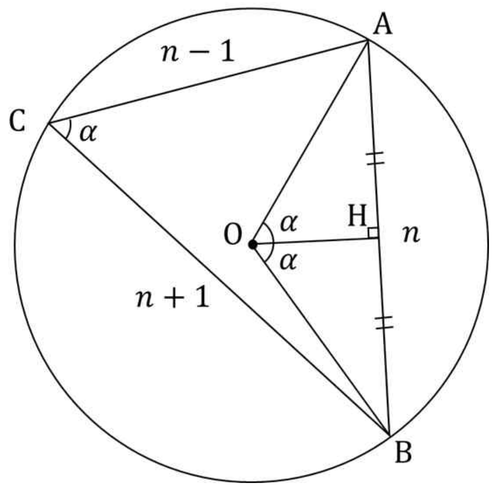
상금을 받는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X의 확률분포는 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{53}{120}$	$\frac{44}{120}$	$\frac{18}{120}$	$\frac{4}{120}$	$\frac{1}{120}$

X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)=1\times\dfrac{44}{120}+2\times\dfrac{18}{120}+3\times\dfrac{4}{120}+4\times\dfrac{1}{120}=\dfrac{96}{120}=\dfrac{4}{5}$이므로 총 상금의 기댓값은 $720\times\dfrac{4}{5}=576$만 원이다.

답 : 576 만 원

3. 오른쪽 그림의 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해



$n^2=(n+1)^2+(n-1)^2-2(n+1)(n-1)\cos\alpha$ 이고, 정리하면

$\cos\alpha=\dfrac{n^2+2}{2(n^2-1)}$ 이다. 한편 삼각형 OBH에서

$R\sin\alpha=\dfrac{n}{2}$, 따라서

$$R^2=\frac{n^2}{4}\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{n^2}{4}\frac{1}{1-\cos^2\alpha}=\frac{n^2}{4}\frac{1}{1-\left(\dfrac{n^2+2}{2(n^2-1)}\right)^2}=\frac{(n^2-1)^2}{3(n^2-4)}$$

이다. 외접원의 넓이는 $S_n=\pi R^2$ 이므로 $\dfrac{S_n}{n^2}=\dfrac{(n^2-1)^2}{3n^2(n^2-4)}\pi$ 이다.

함수 $f(x)=\dfrac{(x^2-1)^2}{3x^2(x^2-4)}$ 에 대하여, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2-1)^2}{3x^2(x^2-4)}=\dfrac{1}{3}$ 이므로,

구하는 극한값은 $\dfrac{\pi}{3}$ 이다

답 : $\dfrac{\pi}{3}$

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

(나)의 '갑의 주장'에 따르면, 인간은 합리적 존재이기에 부정행위 시의 편익과 비용을 저울질하여 부정행위를 저지를지의 여부와 정도를 결정한다. 이것은 부정행위가 적발되기 어려운 상황인 <실험 1>의 집단과 <실험 2>의 집단에서 부정행위가 일어난 이유를 잘 설명한다. 그러나 <실험 1>에서 상금이 늘어나 편익이 증가했음에도 부정행위의 정도가 변함없거나 감소한 점, <실험 2>에서 두번째 집단이 첫번째 집단에 비해 부정행위 발각 가능성이 낮고 가져갈 수 있는 편익이 더 큼에도 불구하고 두 집단의 부정행위 정도는 같았던 점은 '갑의 주장'에 의해 잘 설명되지 않는다. 이러한 (가)의 실험 결과는 (다)의 '을의 강연'에 의해 설명될 수 있다. (다)에 따르면, 인간은 도덕과 욕망이 갈등할 때 자신의 자아이미지를 훼손하지 않는 범위에서 욕망을 충족하려고 한다. 이를 통해 참가자들은 각 실험에서 편익의 크기나 비용을 고려하여 행동하기도 하지만, 결정적으로 자신의 자아에 바탕을 한 기준선을 고려하여 행동함을 알 수 있다. <실험 1> <실험 2>에서 환경이 바뀌었음에도 대부분의 상황에서 참가자들이 평균적으로 6문제를 보고한 것도 다수의 사람들이 2문제 정도의 부정행위를 부정행위 정도의 기준선으로 생각하기 때문이라고 이해할 수 있다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

(나)에서 갑은 인간은 도덕적, 사회적 고려 없이 경제적 편익과 비용만을 고려하는 합리적 존재라고 말한다. 이는 실험 1과 2에서 부정행위가 가능해지자 다수의 참가자들이 더 많은 보상을 위해 부정행위로 행하는 결과를 잘 설명한다. 하지만 인간의 선택은 편익과 비용의 계산에 의해서만 일어난다는 갑의 주장은 실험 1과 2의 나머지 결과를 잘 설명하지 못한다. 실험 1의 추가실험에서는 상금을 늘려 편익을 높이는 방식으로, 실험 2에서는 답안지를 반만 파쇄하거나 아예 정답 개수 보고도 없애 부정행위 발각 가능성을 높이거나 낮춰 비용에 변화를 주는 방식으로도 부정행위의 정도는 변하지 않았기 때문이다.

(다)에서 을은 사람들이 자아 이미지를 훼손하지 않는 한도 내에서 부정의 기준선을 마련한다고 말한다. 이를 (가)의 실험 결과에 적용한다면 사람들이 마련한 자아 이미지를 훼손하지 않는 기준선은 평균 두 문제 정도의 이득이다. 사람들은 부정행위로 이득을 취할 수 있는 상황이 되자 두 문제 이하의 이득이라는 한도 내에서 최대한의 이득을 보려 하였으므로. 적발 확률의 변동에도 부정행위의 정도는 변하지 않았고 상금이 매우 커져 부정행위의 이득이 너무 커지자 자아 이미지를 보호하기 위해 부정행위를 줄였다고 해석이 가능하다.

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 주머니 A에서 공을 1개 꺼내 확인하고 다시 넣는 시행을 확률변수 X, 같은 시행을 주머니 B에서 시행하는 것을 확률변수 Y 라고 둔다. 이때의 두 변수의 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	계
P(X)	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

Y	-1	0	1	2	3	계
P(Y)	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

변수 X의 평균과 분산은,

$\rightarrow E(X) = \frac{2+2+3+4+5}{7} = \frac{21}{7} = 3$

$V(X) = \frac{2+4+9+16+50}{7} - \frac{49}{7} = \frac{18}{7}$ 이고,

변수 Y의 평균과 분산은,

$\rightarrow E(Y) = \frac{-2+1+2+6}{7} = \frac{7}{7} = 1$

$V(Y) = \frac{2+1+4+18}{7} - \frac{7}{7} = \frac{18}{7}$ 이다.

이때 A와 B에서 각각 4개씩 꺼내 나온 수 8개의 평균이 W이므로 W는 모집단 X와 Y에서 4만큼 각각 추출하여 얻은 표본평균과 관련이 있음을 알수있다. 이는 다음과 같이 표현된다.

$W = \frac{1}{2}(\bar{X}+\bar{Y})$

따라서 $E(W)$는 $\frac{1}{2}(E(\bar{X})+E(\bar{Y}))$ 이고, $V(W)$는 $\frac{1}{4}(V(\bar{X})+V(\bar{Y}))$ 이다.

표본평균의 평균은 모평균과 같으므로 $E(\bar{X})=3$, $E(\bar{Y})=1$ 이고

표본평균의 분산은 $\frac{모분산}{추출한 개수}$ 이므로 $V(\bar{X}) = V(\bar{Y}) = \frac{18}{7}$ 이다

따라서 $E(W)=2$, $V(W) = \frac{9}{28}$ 이다.

이때 $E(\frac{5}{2}W-1) < n < \frac{2521}{V(-28W+10)}$ 을 풀면

$4 < n < \frac{2521}{252}$ 이되고 $\frac{2521}{252}$ 은 10.xx 이므로

짝수 n은 6, 8, 10 만 가질 수 있다.

따라서 짝수 n의 개수는 3개이다

$\rightarrow 3$

2. 받을 수 있는 상금을 변수 X로 둘 때, 변수 X는 0, 720만원, 1440만원, 2160만원, 2880만원을 가진다. 상금이 0원일때의 확률을 계산하면

1을 제외하고

전부 질때: $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

1, 3만 이길때: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{10}$

1, 4만 이길때: $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{15}$

1, 5만 이길때: $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$

1, 3, 5만 이길때: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{40}$

이를 합하면 $\frac{53}{120}$ 이 나온다

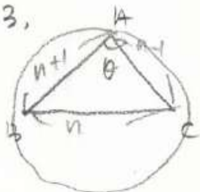
이와 같은 방식으로 나머지도 계산하면 아래와 같은 확률분포표를 얻을 수 있다.

X	0	720	1440	2160	2880	계
P(X)	$\frac{53}{120}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{120}$	1

따라서 기댓값은 $0 \times \frac{53}{120} + 720 \times \frac{11}{30} + 1440 \times \frac{3}{20} + 2160 \times \frac{1}{30} + 2880 \times \frac{1}{120}$ = 576만원이다.

$\rightarrow$ 576만원

3.



조건에 맞게 삼각형 ABC를 그린다.

이때 △ABC의 외접원을 그리고

∠BAC = θ라 둔다.

$\cos\theta = \frac{n^2+2}{2(n^2-1)}$ 이고 $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ 임에 따라

$\sin\theta = \sqrt{\frac{3n^2(n^2-4)}{4(n^2-1)^2}} = \frac{n}{2(n^2-1)}\sqrt{3(n^2-4)}$ 이다.

외접원의 반지름을 R이라고 한다면 $\sin\theta = \frac{n}{2R}$ 이다

따라서 $\frac{n}{2(n^2-1)}\sqrt{3(n^2-4)} = \frac{n}{2R} \rightarrow R = \frac{n^2-1}{\sqrt{3(n^2-4)}}$ 이다.

이때 외접원의 넓이는 πR^2 이므로

$\pi R^2 = \pi \cdot \frac{n^4-2n^2+1}{3(n^2-4)} = S_n$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n^4-2n^2+1)}{n^2 \cdot 3(n^2-4)} = \frac{\pi}{3}$ 이다.

$\longrightarrow \frac{\pi}{3}$

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

[1] 주머니 A 나오는 공 번수 X , 주머니 B 나오는 공 번수 Y 가정

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

Y	-1	0	1	2	3
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

$E(X)=3.$ $E(\bar{X})=3$ $\quad$ $E(Y)=1$ $E(\bar{Y})=1$

$V(X)=\frac{18}{7}$ $V(\bar{X})=\frac{9}{14}$ $\quad$ $V(Y)=\frac{18}{7}$ $V(\bar{Y})=\frac{9}{14}$

$W=\frac{X_1+X_2+X_3+X_4+Y_1+Y_2+Y_3+Y_4}{8}=\frac{1}{2}\times\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{Y_1+Y_2+Y_3+Y_4}{4}$

$\rightarrow W=\frac{1}{2}\times\bar{X}+\frac{1}{2}\bar{Y}=\frac{1}{2}(\bar{X}+\bar{Y})$

$E(W)=\frac{1}{2}E(\bar{X})+\frac{1}{2}E(\bar{Y})$ 이므로 $\quad$ ($\bar{X}$는 표본크기 4인 표본의 평균, $\bar{Y}$는 표본크기 4인 표본의 평균)

$E(W)=\frac{1}{2}\times3+\frac{1}{2}\times1=\boxed{2}$

$V(W)=\frac{1}{4}V(\bar{X})+\frac{1}{4}V(\bar{Y})$ 이므로

$V(W)=\frac{1}{4}\times\frac{9}{14}+\frac{1}{4}\times\frac{9}{14}=\boxed{\frac{9}{28}}$

$\frac{5}{2}E(W)-1<n<\frac{2521}{28^2V(W)}$

$\rightarrow 4<n<\frac{2521}{252}$

$\rightarrow 4<n<10.xxx\ldots$

짝수 $n=6,8,10$ $\quad$ $\boxed{3개}$

이를 통해 확률분포표를 확인할 수 있다.

확률변수(상금) X라고 가정

X	0	720만원	1440만원	2160만원	2880만원
P	$\frac{53}{120}$	$\frac{44}{120}$	$\frac{18}{120}$	$\frac{4}{120}$	$\frac{1}{120}$

기댓값 $E(X)=\frac{44}{120}\times720$만원 $+\frac{18}{120}\times1440$만원 $+\frac{4}{120}\times2160$만원

$+\frac{1}{120}\times2880$만원

$\rightarrow$ 264만원 + 216만원 + 72만원 + 24만원

$\rightarrow$ $\boxed{576만원}$

[2] (O(바둑기사 승리), X(바둑기사 패배)라고 가정)

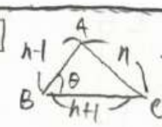
수형도를 통해 승패 경우의 수를 따질 수 있다

1번째 대국	2"	3"	4"	5"
O	O	O	O	O
				X
			X	O
				X
		X	O	O
				X
			X	O
				X
	X	O	O	O
				X
			X	O
				X
		X	O	O
				X
			X	O
				X

첫번째 승리 확률 1
두 번째 " $\frac{1}{2}$
세 번째 " $\frac{1}{3}$
네 번째 " $\frac{1}{4}$
다섯 번째 " $\frac{1}{5}$

이렇듯 16가지의 경우의 수가 나온다.

[3]



$\rightarrow$ $\triangle ABC$ 가정. $(n\geq3)$ (n은 자연수)

코사인 법칙을 통해 $\cos\theta=\frac{n^2+2}{2(n^2-1)}$ 을 구할수 있다.

이를 통해 삼각함수의 정의 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$을 통해 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3n^4-12n^2}}{2(n^2-1)}$ 을 구할 수 있다. 사인법칙으로 $\triangle ABC$ 외접원의 반지름을 n으로 나타내면

$R=\frac{n^2-1}{\sqrt{3n^2-12}}$

(R은 $\triangle ABC$ 외접원의 반지름)

$S_n=\left\{\frac{n^2-1}{\sqrt{3n^2-12}}\right\}^2\times\pi=\frac{(n^2-1)^2\pi}{3n^2-12}$ 이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{\pi}{3}$ $\quad$ $\boxed{\frac{\pi}{3}}$