한양대학교 2023학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

오후(2)-1번

1. 제시문 <나>에 의해 ${}_{n}C_{k}+{}_{n}C_{k+1}={}_{n+1}C_{k+1}$ 이다. 이를 이용하면

$$\begin{aligned} {}_{3n+3}C_{3k} &= {}_{3n+2}C_{3k-1}+{}_{3n+2}C_{3k} \\ &= {}_{3n+1}C_{3k-2}+2\times{}_{3n+1}C_{3k-1}+{}_{3n+1}C_{3k} \\ &= {}_{3n}C_{3k-3}+3\times{}_{3n}C_{3k-2}+3\times{}_{3n}C_{3k-1}+{}_{3n}C_{3k} \end{aligned}$$

를 얻는다.

2. 1번의 결과를 이용하면

$$\begin{aligned} a_{n+1}+a_{n} &= 2+\sum_{k=1}^{n}{}_{3n+3}C_{3k}+\sum_{k=0}^{n}{}_{3n}C_{3k} \\ &= 2+\sum_{k=1}^{n}\left({}_{3n}C_{3k-3}+3\times{}_{3n}C_{3k-2}+3\times{}_{3n}C_{3k-1}+{}_{3n}C_{3k}\right)+\sum_{k=0}^{n}{}_{3n}C_{3k} \\ &= 2+\sum_{k=1}^{n}\left({}_{3n}C_{3k-3}+3\times{}_{3n}C_{3k-2}+3\times{}_{3n}C_{3k-1}\right)+2\sum_{k=0}^{n}{}_{3n}C_{3k}-1 \\ &= 2+\sum_{k=1}^{n}\left(3\times{}_{3n}C_{3k-2}+3\times{}_{3n}C_{3k-1}\right)+3\sum_{k=0}^{n}{}_{3n}C_{3k}-2 \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(3\times{}_{3n}C_{3k-2}+3\times{}_{3n}C_{3k-1}\right)+3\sum_{k=0}^{n}{}_{3n}C_{3k} \\ &= 3\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}C_{k} \\ &= 3\times 2^{3n} \end{aligned}$$

를 얻는다.

3. 수열 $\left\{(-1)^{n+1}(a_{n}+a_{n+1})\right\}$이 등비수열이다.

$$\begin{aligned} a_{1}+a_{100} &= (a_{1}+a_{2})-(a_{2}+a_{3})+\ \cdots\ -(a_{98}+a_{99})+(a_{99}+a_{100}) \\ &= \sum_{k=1}^{99}(-1)^{k+1}(3\times 2^{3k}) \\ &= \frac{24(1-(-8)^{99})}{1-(-8)}=\frac{8}{3}(8^{99}+1) \end{aligned}$$

$a_{1}=2$ 이므로 $a_{100}=\dfrac{8}{3}(8^{99}+1)-2=\dfrac{1}{3}(8^{100}+2)$ 이다.

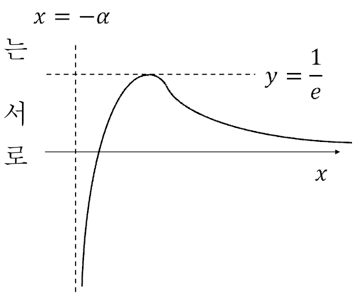
대칭성에 의해 $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}{}_{300}C_{3k-1}=\sum_{k=1}^{100}{}_{300}C_{3k-2}$ 이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}{}_{300}C_{3k-1}=\frac{1}{2}(8^{100}-a_{100})=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}8^{100}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}(8^{100}-1)$ 이다.

답 : $\dfrac{1}{3}(8^{100}-1)$

한양대학교 2023학년도 신입학전형 수시

자 연 계 **논 술 예 시 답 안** 오후(2)-2번

1. 함수 $f(x)=\dfrac{\ln(x+\alpha)}{x+\alpha}$을 미분하면 $f'(x)=\dfrac{1}{(x+\alpha)^2}(1-\ln(x+\alpha))$를 얻는다. 따라서 도함수 $f'(x)$는 $-\alpha<x<e-\alpha$ 범위에서 양수, $x>e-\alpha$ 범위에서 음수, $x=e-\alpha$에서는 0이 되며, $f(x)$는 $x=e-\alpha$에서 최댓값 $1/e$를 갖는다. 함수 $f(x)$는 $x>-\alpha$ 범위에서만 정의되고 x가 $-\alpha$로 가까이 갈수록 음의 무한대로 발산하므로, 문제에 주어진 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$과 종합하여 $f(x)$의 개형을 그려 보면 오른쪽과 같은 그림을 얻는다.



그러므로 $(f\circ f)(x)=\dfrac{1}{e}$이라면 $f(x)=e-\alpha$인데, $f(x)=t$인 x가 정확히 두 개가 되는 것은 $0<t<\dfrac{1}{e}$에서만 가능하다. 그러므로 $0<e-\alpha<\dfrac{1}{e}$이고, 이것은 $e-\dfrac{1}{e}<\alpha<e$과 동치이다.

답 : $e-\dfrac{1}{e}<\alpha<e$

2. $f'(-1)=a$, $f'(1)=-b$로 놓자. 그러면 곡선 $y=f(x)$위의 점 $\mathrm{A}(-1,0)$과 $\mathrm{B}(1,0)$에서의 접선의 방정식은 각각 $y=a(x+1)$, $y=-b(x-1)$로 주어지는데, 이를 연립하면 교점의 좌표 $\left(\dfrac{b-a}{a+b},\dfrac{2ab}{a+b}\right)$를 얻는다. 따라서 $S=\dfrac{2ab}{a+b}$임을 알 수 있다. $f(x)$의 두 접선이 x축과 이루는 예각 $\angle\mathrm{PAB}$와 $\angle\mathrm{PBA}$를 각각 α와 β라 하면, $a=\tan\alpha$, $b=\tan\beta$임을 알 수 있다. 이제 $\theta=\angle\mathrm{APB}$라 하면 $\theta=\pi-\alpha-\beta$이고, 따라서

$\tan\theta=\tan(\pi-\alpha-\beta)=-\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta-1}=\dfrac{a+b}{ab-1}$이다. 그러므로 $\cot\theta=\dfrac{ab}{a+b}-\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{S}{2}-\dfrac{1}{23}$이 된다.

답 : $\cot\theta=\dfrac{S}{2}-\dfrac{1}{23}$

3. 원의 방정식은 $(x-t)^2+(y-1)^2=1$이고 직선 AB과 AC의 방정식은 각각 $y=\sqrt{3}x+1$, $y=-\sqrt{3}x+1$로 주어진다. 이를 연립하여 원과 직선 AB, AC가 각각 만나는 두 점 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,y_2)$를 구하려면 이차방정식 $(x-t)^2+(\sqrt{3}x)^2=1$을 풀어야 하며, 그 결과로 $x_1=\dfrac{1}{4}(t-\sqrt{4-3t^2})$, $x_2=\dfrac{1}{4}(t+\sqrt{4-3t^2})$를 얻는다. 그러므로 $y_1=1+\dfrac{\sqrt{3}}{4}(t-\sqrt{4-3t^2})$, $y_2=1-\dfrac{\sqrt{3}}{4}(t+\sqrt{4-3t^2})$임을 알 수 있다. 이제 선분 PQ의 길이를 계산해 보면

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{4-3t^2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)^2}=1$이 되므로, 호 PQ와 현 PQ사이 영역의 넓이는 t와 관계없이 항상 상수 C로 일정하다. 삼각형 APQ의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AQ}}\times\sin(\angle\mathrm{PAQ})=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AQ}}$로 주어지는데,

$\overline{\mathrm{AP}}^2=x_1^2+(y_1-1)^2=\dfrac{1}{4}(t-\sqrt{4-3t^2})^2$, $\overline{\mathrm{AQ}}^2=x_2^2+(y_2-1)^2=\dfrac{1}{4}(t+\sqrt{4-3t^2})^2$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AQ}}=-\dfrac{1}{4}(t-\sqrt{4-3t^2})(t+\sqrt{4-3t^2})=1-t^2$이 된다. 따라서 $f(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(1-t^2)+C$이고, $f'(t)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$를 얻는다.

답 : $f'(t)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $${}_{3n+3}C_{3k} = {}_{3n+2}C_{3k-1} + {}_{3n+2}C_{3k}$$
$$= {}_{3n+1}C_{3k-2} + {}_{3n+1}C_{3k-1} + {}_{3n+1}C_{3k-1} + {}_{3n+1}C_{3k}$$
$$= {}_{3n+1}C_{3k-2} + 2\times{}_{3n+1}C_{3k-1} + {}_{3n+1}C_{3k}$$
$$= {}_{3n}C_{3k-3} + {}_{3n}C_{3k-2} + 2({}_{3n}C_{3k-2} + {}_{3n}C_{3k-1}) + {}_{3n}C_{3k-1} + {}_{3n}C_{3k}$$
$$= {}_{3n}C_{3k-3} + 3\times{}_{3n}C_{3k-2} + 3\times{}_{3n}C_{3k-1} + {}_{3n}C_{3k}$$

2. $$a_{n+1} = 2 + \sum_{k=1}^{n} {}_{3n+3}C_{3k}$$
$$= 2 + \sum_{k=1}^{n}\left({}_{3n}C_{3k-3} + 3\times{}_{3n}C_{3k-2} + 3\times{}_{3n}C_{3k-1} + {}_{3n}C_{3k}\right)$$
$$= 2 + \sum_{k=1}^{n}{}_{3n}C_{3k-3} + 3\sum_{k=1}^{n}({}_{3n}C_{3k-2} + {}_{3n}C_{3k-1}) + \sum_{k=1}^{n}{}_{3n}C_{3k}$$
$$= {}_{3n}C_0 + {}_{3n}C_{3n} + \sum_{k=1}^{n}{}_{3n}C_{3k-3} + \sum_{k=1}^{n}{}_{3n}C_{3k} + 3\sum_{k=1}^{n}({}_{3n}C_{3k-2} + {}_{3n}C_{3k-1})$$
$$= {}_{3n}C_{3n} + \sum_{k=0}^{n-1}{}_{3n}C_{3k} + {}_{3n}C_0 + \sum_{k=1}^{n}{}_{3n}C_{3k} + 3\sum_{k=1}^{n}({}_{3n}C_{3k-2} + {}_{3n}C_{3k-1})$$
$$= \sum_{k=0}^{n}{}_{3n}C_{3k} + \sum_{k=0}^{n}{}_{3n}C_{3k} + 3\sum_{k=1}^{n}({}_{3n}C_{3k-2} + {}_{3n}C_{3k-1})$$

$a_n = \sum_{k=0}^{n}{}_{3n}C_{3k}$ 이므로

$$a_n + a_{n+1} = 3\sum_{k=0}^{n}{}_{3n}C_{3k} + 3\sum_{k=1}^{n}({}_{3n}C_{3k-2} + {}_{3n}C_{3k-1})$$
$$= 3\sum_{k=0}^{3n}{}_{3n}C_k$$
$$= 3\times 2^{3n}$$

3. $$\sum_{n=1}^{99} a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{99} a_n = 2 + \sum_{n=1}^{49}(a_{2n} + a_{2n+1})$$
$$= 2 + \sum_{n=1}^{49}(3\times 2^{3\times 2n}) = 2 + \frac{64^{49}-1}{64-1}\times 3\times 64 \quad \cdots\cdots (1)$$
$$\sum_{n=1}^{100} a_n = \sum_{n=0}^{49}(a_{2n+1} + a_{2n+2})$$
$$= \sum_{n=0}^{49}(3\times 2^{3(2n+1)}) = \frac{64^{50}-1}{64-1}\times 24 \quad \cdots\cdots (2)$$

(2)에서 (1)을 빼면

$$a_{100} = \frac{64^{50}+2}{3}$$

한편 $\sum_{k=1}^{100}{}_{300}C_{3k-1} = \sum_{k=1}^{100}{}_{300}C_{3(101-k)-1} = \sum_{k=1}^{100}{}_{300}C_{302-3k}$

$= \sum_{k=1}^{100}{}_{300}C_{300-(302-3k)} = \sum_{k=1}^{100}{}_{300}C_{3k-2}$ 이고,

$$2^{300} = \sum_{k=0}^{300}{}_{300}C_k$$
$$= \sum_{k=0}^{100}{}_{300}C_{3k} + \sum_{k=1}^{100}{}_{300}C_{3k-1} + \sum_{k=1}^{100}{}_{300}C_{3k-2}$$
$$= a_{100} + \sum_{k=1}^{100}{}_{300}C_{3k-1} + \sum_{k=1}^{100}{}_{300}C_{3k-2}$$

이므로,

$$\sum_{k=1}^{100}{}_{300}C_{3k-1} = \frac{2^{300} - a_{100}}{2}$$
$$= \frac{2^{300} - \frac{64^{50}+2}{3}}{2}$$
$$= \frac{2^{300} - \frac{2^{300}}{3} - \frac{2}{3}}{2}$$
$$= \frac{\frac{2}{3}\times 2^{300} - \frac{2}{3}}{2}$$
$$= \frac{2^{300}-1}{3}$$

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

(1-1)

정수 n과 k가 $1 \le k \le n$ 일때

<나> 에서 ${}_{n}C_{k} = {}_{n-1}C_{k} + {}_{n-1}C_{k-1}$ 이므로 이를 대입하면

$${}_{3n+3}C_{3k} = {}_{3n+2}C_{3k} + {}_{3n+2}C_{3k-1}$$

$$= {}_{3n+1}C_{3k} + {}_{3n+1}C_{3k-1} + {}_{3n+1}C_{3k-1} + {}_{3n+1}C_{3k-2}$$

$$= {}_{3n}C_{3k} + {}_{3n}C_{3k-1} + 2\cdot {}_{3n}C_{3k-1} + 2\cdot {}_{3n}C_{3k-2} + {}_{3n}C_{3k-2} + {}_{3n}C_{3k-3}$$

$= {}_{3n}C_{3k} + 3\times {}_{3n}C_{3k-1} + 3\times {}_{3n}C_{3k-2} + {}_{3n}C_{3k-3}$ 이 성립한다.

(1-2)

(1-1)의 결과를 이용해 a_{n+1} 을 정리하면

$$a_{n+1} = 2 + \sum_{k=1}^{n} {}_{3n+3}C_{3k} = 2 + \sum_{k=1}^{n}\left\{{}_{3n}C_{3k} + {}_{3n}C_{3k-3} + 3\left({}_{3n}C_{3k-1} + {}_{3n}C_{3k-2}\right)\right\}$$

에서 $\sum_{k=1}^{n} {}_{3n}C_{3k-3} = \sum_{k=1}^{n} {}_{3n}C_{3k}$ $\left({}_{3n}C_{0} = {}_{3n}C_{3n} = 1\right)$ 이므로

$a_{n+1} = 2 + \sum_{k=1}^{n}\left\{2\cdot {}_{3n}C_{3k} + 3\left({}_{3n}C_{3k-1} + {}_{3n}C_{3k-2}\right)\right\}$ 이다.

$$a_n + a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} {}_{3n}C_{3k} + 3\sum_{k=1}^{n}\left({}_{3n}C_{3k-1} + {}_{3n}C_{3k-2}\right) + 2\sum_{k=1}^{n} {}_{3n}C_{3k} + 2$$

$$= 3\left\{\sum_{k=0}^{n} {}_{3n}C_{3k} + \sum_{k=1}^{n}\left({}_{3n}C_{3k-1} + {}_{3n}C_{3k-2}\right)\right\}$$

$= 3\left\{{}_{3n}C_{0} + {}_{3n}C_{1} + {}_{3n}C_{2} + \cdots + {}_{3n}C_{3n}\right\} = 3\cdot\sum_{k=0}^{3n} {}_{3n}C_{k}$ 이므로

이항정리에 의해 $a_n + a_{n+1} = 3\cdot 2^{3n}$ 이 자연수 n에 대해 성립한다.

(1-3)

$X = \sum_{k=1}^{100} {}_{300}C_{3k-1}$ 에서 ${}_{300}C_{3k-1} = {}_{300}C_{301-3k}$ 이다.

이때 $\sum_{k=1}^{100} {}_{300}C_{301-3k} = {}_{300}C_{1} + {}_{300}C_{4} + \cdots + {}_{300}C_{298} = \sum_{k=1}^{100} {}_{300}C_{3k-2}$ 이므로

$2X = \sum_{k=1}^{100}\left({}_{300}C_{3k-2} + {}_{300}C_{3k-1}\right)$ 이다.

$a_{100} = \sum_{k=0}^{100} {}_{300}C_{3k}$ 이므로 $a_{100} + 2X = \sum_{k=0}^{300} {}_{300}C_{k}$ 로 정리할 수 있고,

이는 이항정리에 의해 $a_{100} + 2X = 2^{300}$ 이다.

(1-2) 에서 자연수 n에 대해 $a_n + a_{n+1} = 3\cdot 2^{3n}$ 이므로

$$+\left(a_{100} + a_{99}\right) = 3\cdot 8^{99}$$
$$-\left(a_{99} + a_{98}\right) = -3\cdot 8^{98}$$
$$\vdots$$
$$+\ \underline{+\left(a_{2} + a_{1}\right) = 3\cdot 8^{1}}$$
$$a_{100} + a_{1} = 3\cdot\left(8^{99} - 8^{98} + \cdots + 8^{1}\right) = 3\cdot\sum_{k=1}^{99}(-8)^{k}\cdot(-1)$$
$$= 3\cdot 8\cdot\frac{1-(-8)^{99}}{1-(-8)} = \frac{8}{3}\left(1 + 2^{297}\right)$$

임을 알수 있다. $a_1 = \sum_{k=0}^{1} {}_{3}C_{3k} = {}_{3}C_{0} + {}_{3}C_{3} = 2$ 이므로

$a_{100} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\cdot 2^{300} - 2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 2^{300}$,

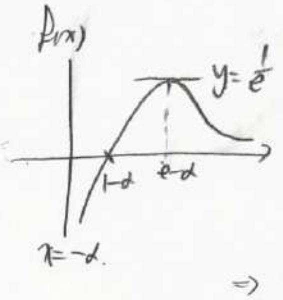
$2X = 2^{300} - a_{100} = \frac{2}{3}\cdot 2^{300} - \frac{2}{3}$, $X = \frac{1}{3}\left(2^{300} - 1\right)$ 이 구하던 값이다.

1. $f(x)$는 $y=\frac{\ln x}{x}$ 를 x축으로 $-\alpha$만큼 평행이동 시킨 그래프이다

$\therefore \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2}$ 이고

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ 이므로 그래프로 그려보면



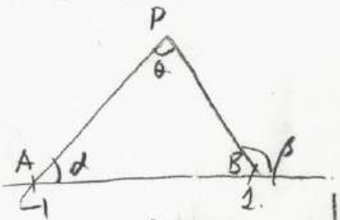
$\therefore$ 방정식 $f(f(x)) = \frac{1}{e}$ 에서의 실근의 개수를 구할 때 $f(x)=t$ 로 치환해도 근의 개수는 변하지 않는다.

$f(t)=\frac{1}{e}$ $\quad t=e-\alpha$.

$\Rightarrow f(x)= e-\alpha$ 의 근의 개수가 2개 이도록 하는 α 범위는

$0 < e-\alpha < \frac{1}{e} \Rightarrow \boxed{e-\frac{1}{e} < \alpha < e}$ 이다

2. 주어진 조건에 따라 만들어지는 $\triangle APB$를 좌표평면에 그려보면 다음과 같다.



$\angle PAB=\alpha$ 라 하고

$\angle PBA=\pi-\beta \rightarrow \begin{cases} \tan\alpha = f'(-1) \\ \tan\beta = f'(1) \end{cases}$ 이다

이때 $\theta=\beta-\alpha$.

$\therefore \cot(\angle APB) = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha} = \frac{1+f'(-1)f'(1)}{-23}$

한편 점 P의 좌표는 점A에서 그은 접선과 점B에서 그은 접선의 교점이므로 $f'(-1)(x+1) = f'(1)(x-1)$

P의 x좌표 $= \frac{-f'(-1)-f'(1)}{f'(-1)-f'(1)}$

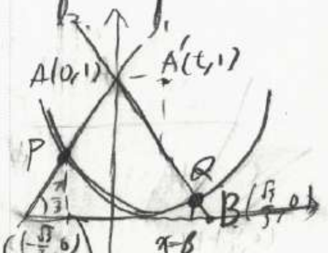
P의 y좌표 $= \left(\frac{-f'(-1)-f'(1)}{f'(-1)-f'(1)}+1\right)f'(-1) = \frac{-2f'(-1)f'(1)}{23}$

$\therefore \triangle APB$의 넓이 $= S = \frac{1}{2}\times 2\times$(P의 y좌표)

$= \frac{-2f'(-1)f'(1)}{23}$

$\therefore \cot(\angle APB) = \frac{1}{-23}\left(1-\frac{23}{2}S\right) = \frac{S}{2}-\frac{1}{23}$

3. $\triangle ABC$를 좌표평면에 나타내어 보자.



문제에 제시된 원의 방정식은 $\Rightarrow (x-t)^2+(y-1)^2=1$ 이고

$l_1: y=\sqrt{3}x+1$

$l_2: y=-\sqrt{3}x+1$

$\therefore$ 원의 방정식과 l_1, l_2가 만나는 점은 각각 α, β라 하자

이때 $(x-t)^2+(\pm\sqrt{3}x)^2=1$.

$\Rightarrow 4x^2-2tx+t^2-1=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=\frac{t}{2}$ $\quad \beta-\alpha=\frac{\sqrt{4-3t^2}}{2}$ $\quad \alpha\beta=\frac{t^2-1}{4}$

$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{\{\sqrt{3}(\alpha+\beta)\}^2+(\beta-\alpha)^2} = 1$

$\therefore \angle PA'Q$는 $0<t<1$에서 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

$\therefore$ 호 PQ와 $\overline{PQ}$로 둘러싼 부분의 넓이는 $0<t<1$에서 $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$ 이다. 그리고 $\triangle APQ$의 넓이는

$\overline{AP} = -2\alpha$ $\quad \overline{AQ}=2\beta$ $\quad \angle PAQ = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$\frac{1}{2}\times(-4\alpha\beta)\times\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}\alpha\beta = \frac{\sqrt{3}}{4}(1-t^2)$

$\therefore f(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1-t^2)+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$ 이므로

$= -\frac{\sqrt{3}}{4}t^2+\frac{\pi}{6}$

$f'(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}t$. 이다.

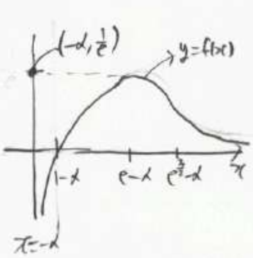
문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 로그함수의 성질에 의해, $f(x)$의 정의역은 $x > -\alpha$

$f'(x) = \dfrac{1-\ln(x+\alpha)}{(x+\alpha)^2}$, $f'(e-\alpha)=0$, $f''(x) = \dfrac{2\ln(x+\alpha)-3}{(x+\alpha)^3}$, $f''(e^{\frac{3}{2}}-\alpha)=0$

x	$-\alpha$	$\cdots$	$e-\alpha$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$

함수 $f(x)$는 $x=e-\alpha$에서 극댓값을 가진다.



$\lim\limits_{x \to -\alpha} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$이므로
$f(x)$의 그래프 개형은 왼쪽과 같다.
$f(e-\alpha) = \frac{1}{e}$이므로
$f(f(x)) = \frac{1}{e}$이 서로 다른 두 실근을 가지기 위해서는
$f(x) = e-\alpha$가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉, $e-\alpha$의 범위가 $0 < e-\alpha < \frac{1}{e}$ 이어야 한다.
따라서 α의 범위는 $e-\frac{1}{e} < \alpha < e$

2. $y=f(x)$ 위의 점 $A(-1, 0)$에서의 접선을 직선 l, 점 $B(1, 0)$에서의 접선을 직선 m이라고 하자.

$f'(-1) > 0$, $f'(1) < 0$ 이므로 점 P의 y좌표는 양수이다.
점 P의 y좌표를 β, x좌표를 α라고 하면 $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \beta = \beta$
점 P에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 점 H라고 하자.

$(\angle APB) = (\angle APH) + (\angle BPH)$

$\tan(\angle APH) = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{PH}} = \dfrac{\alpha+1}{\beta}$, $\tan(\angle BPH) = \dfrac{\overline{BH}}{\overline{PH}} = \dfrac{1-\alpha}{\beta}$

$$\tan(\angle APB) = \tan(\angle APH + \angle BPH) = \frac{\tan(\angle APH) + \tan(\angle BPH)}{1 - \tan(\angle APH)\tan(\angle BPH)}$$

$$= \frac{\frac{2}{\beta}}{1 - \frac{1-\alpha^2}{\beta^2}} = \frac{2\beta}{\beta^2 - 1 + \alpha^2}$$

$\cot(\angle APB) = \dfrac{\alpha^2+\beta^2-1}{2\beta}$

직선 l의 방정식: $y = f'(-1)x + f'(-1)$, 직선 m의 방정식: $y = f'(1)x - f'(1)$

$f'(-1)\cdot\alpha + f'(-1) = f'(1)\cdot\alpha - f'(1)$, $\alpha = \dfrac{f'(-1)+f'(1)}{f'(1)-f'(-1)}$, $\beta = \dfrac{2f'(1)f'(-1)}{f'(1)-f'(-1)}$

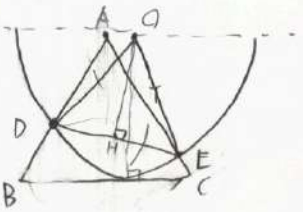
$\alpha = \dfrac{f'(-1)+f'(1)}{-23}$, $\beta = \dfrac{2f'(-1)f'(1)}{-23}$, $(-23\alpha)^2 - 2(-23\beta) = \{f'(-1)-f'(1)\}^2 = 23^2$

$23^2\alpha^2 + 46\beta = 23^2$, $\alpha^2 - 1 = -\dfrac{2}{23}\beta$

$\cot(\angle APB) = \dfrac{\beta^2+\alpha^2-1}{2\beta} = \dfrac{\beta^2 - \frac{2}{23}\beta}{2\beta} = \dfrac{\beta}{2} - \dfrac{1}{23}$

$S = \beta$이므로, $\cot(\angle APB) = \frac{1}{2}S - \frac{1}{23}$

3.



평행이동한 원을 원 C라고 하자
원 C의 중점을 점 O, 원 C와 선분 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$가 만나는 두 점을 점 D, 점 E라고 하자.
점 $A(0,0)$, 점 $B(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -1)$, 점 $C(\frac{1}{\sqrt{3}}, -1)$ 이라고 두면
원 C의 방정식: $(x-t)^2 + y^2 = 1$

직선 AB의 방정식: $y = \sqrt{3}x$, 직선 $\overline{AC}$의 방정식: $y = -\sqrt{3}x$
원 C의 방정식과 직선 $\overline{AB}$의 방정식, 직선 $\overline{AC}$의 방정식을 연립하면
$(x-t)^2 + 3x^2 = 1 \Rightarrow 4x^2 - 2tx + t^2 - 1 = 0$ 근의 공식에 의해,

$x = \dfrac{t \pm \sqrt{4-3t^2}}{4}$, 점 D의 x좌표를 α, 점 E의 x좌표를 β라고 하자.

$\alpha = \dfrac{t - \sqrt{4-3t^2}}{4}$, $\beta = \dfrac{t + \sqrt{4-3t^2}}{4}$, 점 D의 좌표 $(\alpha, \sqrt{3}\alpha)$, 점 E의 좌표 $(\beta, -\sqrt{3}\beta)$

점 O에서 $\overline{DE}$에 내린 수선의 발을 점 H라고 하자.

$\overline{DE} = \sqrt{(\alpha-\beta)^2 + (\alpha\sqrt{3}+\beta\sqrt{3})^2} = \sqrt{4\alpha^2+4\beta^2+4\alpha\beta}$

$\alpha+\beta = \dfrac{t}{2}$, $\alpha\beta = \dfrac{t^2-1}{4}$이므로 $\overline{DE} = 1$

부채꼴 ODE의 넓이 $= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

$\triangle ODE$의 넓이 $= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \overline{OD}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\triangle ADE$의 넓이 $= \overline{AE} \cdot \overline{AD} \cdot \sin(\frac{\pi}{3}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2(\beta) \cdot 2(-\alpha)$
$= \frac{\sqrt{3}}{4}(1-t^2)$

$f(t) =$ 부채꼴 ODE의 넓이 $-$ $\triangle ODE$의 넓이 $+$ $\triangle ADE$의 넓이
$= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}t^2$

$f'(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}t$