한양대학교 2023학년도 신입학전형 수시

자 연 계 | **논 술 예 시 답 안** | 오후(1)-1번

1.$f(0)=0$ 이다. $s=x-t$ 라 놓으면, $ds/dt=-1$이고, $f(x)=\int_x^0 (x-s)se^s(-1)ds=\int_0^x (x-s)se^s ds \;=\int_0^x xse^s ds-\int_0^x s^2e^s ds$.

$f(x)$를 x로 미분을 하면, $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left[x\int_0^x se^s ds-\int_0^x s^2e^s ds\right] = \int_0^x se^s ds+x^2e^x-x^2e^x=\int_0^x se^s ds$ 이고 $f'(0)=0$이다.

$f'(x)$를 한번 더 x에 대하여 미분하면, $f''(x)=xe^x$ 이고 $f''(0)=0$이다.
함수의 오목과 볼록을 조사하기 위해서, $x<0$일 때 $f''(x)<0$이고 $x>0$일 때 $f''(x)>0$이다.
따라서, 열린구간 $(-\infty,0)$에서 위로 볼록하고, 열린구간 $(0,\infty)$에서 아래로 볼록하다. 변곡점의 판정으로 $f''(0)=0$ 이고, $x=0$ 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 달라졌기에 점 $(0,f(0))$ 는 주어진 곡선의 변곡점이다.

2. $f(x)=xe^x\int_0^x te^{-t}dt-e^x\int_0^x t^2e^{-t}dt$. $A=xe^x\int_0^x te^{-t}dt$, $B=e^x\int_0^x t^2e^{-t}dt$ 라고 하자.

$$\begin{aligned}A&=xe^x\int_0^x te^{-t}dt=xe^x\left[(-1)te^{-t}\right]_0^x-\int_0^x(-1)e^{-t}dt\\&=xe^x\left[-xe^{-x}+\int_0^x e^{-t}dx\right]=xe^x\left[-xe^{-x}-e^{-x}+1\right]\\&=-x^2-x+xe^x\end{aligned}$$

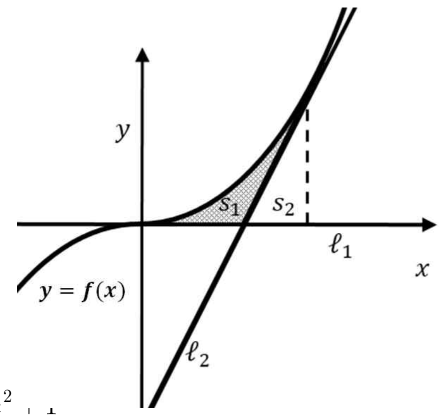
이고,

$$\begin{aligned}B&=e^x\int_0^x t^2e^{-t}dt=e^x\left[(-1)t^2e^{-t}\right]_0^x-\int_0^x(2t)(-1)e^{-t}dt\\&=e^x\left[-x^2e^{-x}+2\int_0^x te^{-t}dt\right]=e^x\left[-x^2e^{-x}+2\left\{\left[(-1)te^{-t}\right]_0^x+\int_0^x e^{-t}dt\right\}\right]\\&=e^x\left[-x^2e^{-x}+2(-xe^{-x}-e^{-x}+1)\right]=-x^2-2x-2+2e^x\end{aligned}$$

따라서,

$$\begin{aligned}f(x)&=(-x^2-x+xe^x)-(-x^2-2x-2+2e^x)\\&=xe^x-2e^x+x+2\\f'(x)&=xe^x-e^x+1\end{aligned}$$

이다.
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=0$이므로 접선 ℓ_1의 방정식은 $y=0$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=e^2+1$이므로 접선 ℓ_2의 방정식은 $y=(e^2+1)x-2(e^2-1)$ 이다.
$f(x)-\{(e^2+1)x-2(e^2-1)\}=xe^x-2e^x+x+2-(e^2+1)x+2(e^2-1)=(x-2)(e^x-e^2)\geq 0$이므로 곡선 $f(x)$는 접선 ℓ_2보다 항상 위에 있다.



영역 S_1+S_2는

$S_1+S_2=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2(xe^x-2e^x+x+2)\,dx=\left[xe^x-3e^x+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2=9-e^2$

ℓ_2의 x절편이 $\dfrac{2(e^2-1)}{e^2+1}$이므로 삼각형 S_2의 넓이는

$\left(2-\dfrac{2(e^2-1)}{e^2+1}\right)\times 4\times\dfrac{1}{2}=4-\dfrac{4(e^2-1)}{e^2+1}$

따라서 구하고자 하는 영역 S_1의 넓이는

$(S_1+S_2)-S_2=(9-e^2)-\left(4-\dfrac{4(e^2-1)}{e^2+1}\right)=5-e^2+\dfrac{4(e^2-1)}{e^2+1}=9-e^2-\dfrac{8}{e^2+1}=\dfrac{-e^4+8e^2}{e^2+1}$

답: $5-e^2+\dfrac{4(e^2-1)}{e^2+1}$ 또는 $\dfrac{-e^4+8e^2+1}{e^2+1}$

3. 양변을 x에 대해 미분하면

$$-e^{-x}\int_0^x g'(t)dt+e^{-x}g'(x)=e^{-x}g'(x)-\sin(2\pi x)-2\pi x\cos(2\pi x)$$

$g(0)=0$이고,

$$\begin{aligned}&g(x)-g(0)=e^x[\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)]\\&\Rightarrow g(x)=e^x[\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)]\end{aligned}$$

모든 양의 실수 x에 대해 $\sin(2\pi x)\le 1$, $\cos(2\pi x)\le 1$ 이므로 $\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)\le 1+2\pi x$ 이다.
그러므로 $g(x)=e^x\{\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)\}\le e^x(1+2\pi x)$이다.

$$\begin{aligned}\int_0^{2023}g(x)dx\le\int_0^{2023}e^x(1+2\pi x)dx&=\int_0^{2023}e^x dx+2\pi\int_0^{2023}xe^x dx=[e^x]_0^{2023}+2\pi\left([xe^x]_0^{2023}-\int_0^{2023}e^x dx\right)\\&=e^{2023}-1+2\pi\left(2023e^{2023}-e^{2023}+1\right)=4046\pi e^{2023}+(1-2\pi)(e^{2023}-1)\end{aligned}$$

$(1-2\pi)(e^{2023}-1)<0$이므로 $\int_0^{2023}g(x)dx\le 4046\pi e^{2023}+(1-2\pi)(e^{2023}-1)<4046\pi e^{2023}$

한양대학교 2023학년도 신입학전형 수시

자 연 계 | **논 술 예 시 답 안** | 오후(1)-2번

1. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AP}}=t \ \left(0 \le t \le \frac{1}{2}\right)$라 하면,

$\overline{\mathrm{PB}}=\sqrt{t^2+1}$, $\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{(1-t)^2+1}=\sqrt{t^2-2t+2}$ 이다.

$\angle \mathrm{BPH}=\alpha$ 라 하면, 삼각형 BPH 에서

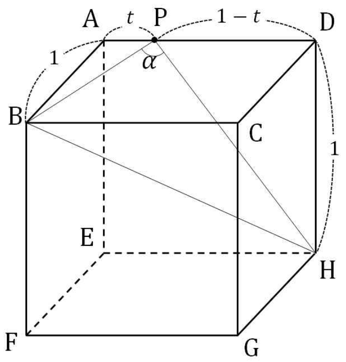
$\overline{\mathrm{BH}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PH}}^2-2\times\overline{\mathrm{PB}}\times\overline{\mathrm{PH}}\times\cos\alpha$ 이고 정리하면

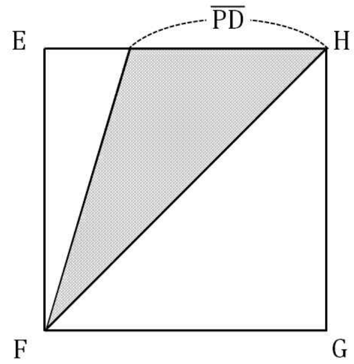
$\cos\alpha=\dfrac{t^2-t}{\sqrt{t^2+1}\,\sqrt{t^2-2t+2}}$ 이다. 삼각형 BPH 의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PB}}\times\overline{\mathrm{PH}}\times\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\sqrt{t^2+1}\,\sqrt{t^2-2t+2}\,\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{\dfrac{t^2-t+1}{2}}$

이고, 이로부터 $t=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\ \left(0\le t\le\dfrac{1}{2}\right)$ 를 구한다.

따라서 정사영의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times1\times\overline{\mathrm{PD}}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{8}$ 이다.





답 : $\dfrac{2+\sqrt{2}}{8}$

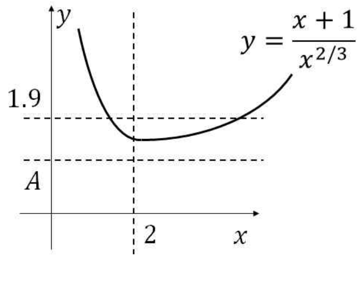
2. 공을 꺼내어 얻은 세 숫자를 x,y,z라 하자. 그러면 $A_{n+1}-A_n$는 x,y,z가 삼각형의 세 변의 길이가 되면서 그 중 적어도 하나가 $n+1$인 경우의 수와 같다. 먼저 $x=n+1$이고 $y,z\le n$이라 가정하자. 만약 $y=1$이면 조건을 만족하는 z를 고를 수 없고, $a>1$인 각 $y=a$마다 z를 $a-1$개의 숫자 $n-a+2, n-a+3, \cdots, n$ 중에서 고르면 충분하다. 따라서 이 경우 $\sum_{a=2}^{n}(a-1)=\sum_{a=1}^{n-1}a=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 만큼의 가짓수가 있다. 대칭적으로 생각하면 y만 $n+1$이거나 z만 $n+1$인 경우의 수도 이와 같다. 만약 두 숫자 x,y가 모두 $n+1$이고 $z\le n$이라면, z는 1부터 n중 어느 숫자여도 x,y,z가 삼각형의 세 변이 된다. 이와 대칭적인 경우들도 모두 따져 보면 합쳐서 $3n$가지 경우의 수가 된다. 마지막으로 $x=y=z=n+1$의 경우도 세어 주면 관계식

$A_{n+1}-A_n=\dfrac{3n(n-1)}{2}+3n+1=\dfrac{3n(n+1)}{2}+1$을 얻는다.

답 : $A_{n+1}-A_n=\dfrac{3n(n+1)}{2}+1$

3. 대칭성에 의해 $\sum_{k=0}^{n/3}{}_nC_k=\sum_{k=0}^{n/3}{}_nC_{n-k}=\sum_{k=2n/3}^{n}{}_nC_k$임을 알 수 있다. 모든 $x>1$에 대해 $\sum_{k=2n/3}^{n}{}_nC_k\le\sum_{k=2n/3}^{n}{}_nC_k\,x^{k-2n/3}$이 성립하므로 $\sum_{k=2n/3}^{n}{}_nC_k\le\sum_{k=2n/3}^{n}{}_nC_k\,x^{k-2n/3}\le\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,x^{k-2n/3}=x^{-2n/3}\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,x^k=\left(\dfrac{1+x}{x^{2/3}}\right)^n$을 얻는다. $A=\left(\sum_{k=0}^{n/3}{}_nC_k\right)^{1/n}$라 하자. $f(x)$는 아래 그림과 같이 $x=2$에서 1.9보다 작은 최솟값을 갖고, $x>1$범위에서 항상 A보다 크기 때문에 $A<f(2)<1.9$임을 알 수 있다.

그러므로 $\sum_{k=0}^{n/3}{}_nC_k<1.9^n$임이 증명된다.



문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.

$f(x) = \int_0^x t(x-t)e^{x-t}\,dt$

$= \int_0^x (x-t)(x-(x-t))e^{x-(x-t)}\,dt$

$= \int_0^x t(x-t)e^t\,dt$

$= x\int_0^x te^t\,dt - \int_0^x t^2e^t\,dt$

$f'(x) = \int_0^x te^t\,dt \quad , \quad f''(x) = xe^x$

x	$x<0$	$x=0$	$x>0$
$f''(x)$	⊖	0	⊕

이계도함수가 음수이면 위로볼록이고 양수이면 아래로볼록이다.

$\boxed{\begin{array}{l} \therefore\ x<0 \text{ 에서 위로 볼록} \\ x>0 \text{ 에서 아래로 볼록} \\ \text{변곡점 좌표: } (0,0) \end{array}}$

2.

$l_1: y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f'(0) = 0,\ f(0) = 0 \Rightarrow l_1: y = 0$

$l_2: y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$f'(2) = \int_0^2 xe^x\,dx = \left[(x-1)e^x\right]_0^2 = e^2+1$

$f(2) = 2\int_0^2 xe^x\,dx - \int_0^2 x^2e^x\,dx = 2(e^2+1) - (2e^2-2)$

$= 4$

$\Rightarrow l_2: y = (e^2+1)(x-2)+4$

$f'(x) = \int_0^x te^t\,dt = (x-1)e^x + 1$

$f(x) = (x-2)e^x + x + 2$

1.의 증감표에 따라 $f'(x)$는 $(-\infty, 0)$에서 감소하고, $x=0$에서 극솟값을 가지며, $(0,\infty)$에서 증가한다.

$f'(0) = 0$ 이므로 이를 그래프에 나타내면

$f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 양수이므로

$f(x)$는 $(-\infty, \infty)$에서 증가하고, 1.에 의해 $(0,0)$에서 변곡점을 가진다.

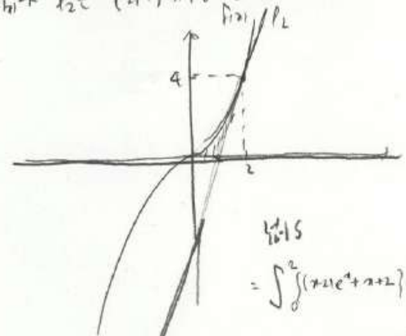
$f(x)$와 직선 l_2의 교점을 구하면

$(x-2)e^x + (x+2) - (e^2+1)(x-2) - 4$

$= (x-2)e^x + x + 2 - (e^2+1)x + 2e^2 - 2$

$= (x-2)e^x - e^2(x-2) = (x-2)(e^x - e^2)$

$f(x)$와 l_2는 $(2,4)$에서만 교점을 가지므로 그래프를 그리면



넓이 S

$= \int_0^2 \{(x-2)e^x + x + 2\}\,dx - \frac{1}{2}\times 4 \times \frac{4}{e^2+1}$

$= \left[(x-3)e^x + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_0^2 - \frac{8}{e^2+1}$

$= 9 - e^2 - \frac{8}{e^2+1}$

$\boxed{\therefore\ 9 - e^2 - \frac{8}{e^2+1}}$

3.

(2)는 항등식이므로 양변을 미분하면

$e^{-x}g'(x) - e^{-x}\int_0^x g'(t)\,dt = e^{-x}g'(x) - \sin(2\pi x) - 2\pi x\cos(2\pi x)$

$e^{-x}\int_0^x g'(t)\,dt = \sin(2\pi x) + 2\pi x\cos(2\pi x) = e^{-x}\left(g(x) - g(0)\right) = e^{-x}\cdot g(x)$

$g(x) = e^x\left\{\sin(2\pi x) + 2\pi x\cdot\cos(2\pi x)\right\}$

$\int_0^{2023} g(x)\,dx = \int_0^{2023} e^x\cdot(x\sin(2\pi x))'\,dx$

$= \left[xe^x\sin(2\pi x)\right]_0^{2023} - \int_0^{2023} xe^x\sin(2\pi x)\,dx$

$= -\int_0^{2023} xe^x\sin(2\pi x)\,dx = 2\pi\int_0^{2023}(x-1)e^x\cos 2\pi x\,dx$

$2\pi\int_0^{2023}(x-1)e^x\cos(2\pi x)\,dx < 2\pi\int_0^{2023}(x+1)e^x\,dx$

$= 2\pi\left[xe^x\right]_0^{2023}$

$= 4.046\pi e^{2023}$

$\therefore \int_0^{2023} g(x)\,dx < 4.046\pi e^{2023}$

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

<1> $f(x)=\int_0^x (xt-t^2)e^{x-t}\,dt$

$= xe^x\int_0^x t\cdot e^{-t}\,dt - e^x\int_0^x t^2e^{-t}\,dt$

$f'(x) = (x+1)e^x\int_0^x t\cdot e^{-t}\,dt + x\cancel{e^x}\cdot x\cancel{e^{-x}}$
$- e^x\int_0^x t^2e^{-t}\,dt - \cancel{e^x}\cdot x^2\cancel{e^{-x}}$

$= (x+1)e^x\int_0^x t\cdot e^{-t}\,dt + \cancel{x^2} - e^x\int_0^x t^2e^{-t}\,dt \cancel{-x^2}$

$= (x+1)e^x\int_0^x te^{-t}\,dt - e^x\int_0^x t^2e^{-t}\,dt.$

$f''(x) = (x+2)e^x\int_0^x te^{-t}\,dt + (x+1)\cancel{e^x}\cdot x\cdot\cancel{e^{-x}}$
$- e^x\int_0^x t^2e^{-t}\,dt - \cancel{e^x}\cdot x^2\cdot\cancel{e^{-x}}$

$= (x+2)e^x\int_0^x te^{-t}\,dt - e^x\int_0^x t^2e^{-t}\,dt + x(x+1) - x^2$

$= (x+2)e^x\Big[-(t+1)e^{-t}\Big]_0^x - e^x\Big[-(t^2+2t+2)e^{-t}\Big]_0^x + x$

$= (x+2)e^x\left(-(x+1)e^{-x}+1\right) - e^x\left(-(x^2+2x+2)e^{-x}+2\right) + x$

$= -(x+1)(x+2) + (x+2)e^x + x^2+2x+2 - 2e^x + x$

$= xe^x.$

$\therefore f''(x)=0$인 $x=0$ 이므로 변곡점의 좌표는 (0, 0)임을 알 수 있다.

또한 $f''(x)=xe^x$는 $\begin{cases} (x\ge 0) & f''(x)\ge 0 \\ (x\le 0) & f''(x)\le 0 \end{cases}$ 이므로

함수 $f(x)$는 $x\ge 0$일때는 아래로 볼록이고 $x\le 0$일때는 위로 볼록인 함수라는 것을 알 수 있다.

<2> $f(x)=xe^x\int_0^x te^{-t}\,dt - e^x\int_0^x t^2\cdot e^{-t}\,dt$

$= xe^x\Big[-(t+1)e^{-t}\Big]_0^x - e^x\Big[-(t^2+2t+2)e^{-t}\Big]_0^x$

$= xe^x\left(-(x+1)e^{-x}+1\right) - e^x\left(-(x^2+2x+2)e^{-x}+2\right)$

$= -x(x+1) + xe^x + x^2+2x+2 - 2e^x.$

$= (x-2)e^x + x + 2 \rightarrow f'(x)=(x-1)e^x+1$

$\therefore f(0)=0,\ f(2)=4$

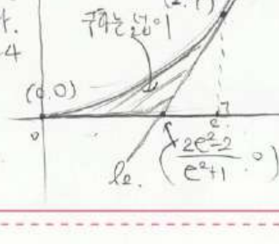
직선 l_1: $f'(0)=0,\ f(0)=0$

$\therefore$ 직선 l_1은 x축임을 알 수 있다.

직선 l_2: $f'(2)=e^2+1,\ f(2)=4$

$\therefore l_2: y=(e^2+1)(x-2)+4$

$y=(e^2+1)x-2e^2+2$



직선 l_2의 x절편은 $\frac{2e^2-2}{e^2+1}$ 이다.

$\therefore$ 구하는 넓이: $\int_0^2 f(x)\,dx - \frac{1}{2}\cdot\left(2-\frac{2e^2-2}{e^2+1}\right)\cdot 4$

$= \int_0^2\left((x-2)e^x+x+2\right)dx - \frac{8}{e^2+1}$

$= \Big[(x-3)e^x+\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_0^2 - \frac{8}{e^2+1} = -e^2+3+2+4-\frac{8}{e^2+1}$

$= 9-e^2-\frac{8}{e^2+1}$

$\underline{9-e^2-\frac{8}{e^2+1}}$ //.

<3> $e^{-x}\int_0^x g'(t)\,dt = \int_0^x e^{-t}g'(t)\,dt - x\sin(2\pi x).$

양변을 x에 대해 미분하면

$-e^{-x}\int_0^x g'(t)\,dt + \cancel{e^{-x}g'(x)} = \cancel{e^{-x}g'(x)} - \sin(2\pi x) - 2\pi x\cos(2\pi x)$

$\therefore \int_0^x g'(t)\,dt = e^x\left(\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)\right)$

$\int_0^x g'(t)\,dt = g(x)-g(0) = g(x)$ 이므로 ($\because$ 조건 <나>에서 $g(0)=0$ 이다.)

$g(x)=e^x\left(\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)\right)$ 임을 알 수 있다.

$\therefore \int_0^{2023} g(x)\,dx = \int_0^{2023} e^x\left(\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)\right)dx$

$0\le x\le 2023$ 에서 $-1\le\sin(2\pi x)\le 1<2\pi$ 이고,

$-2\pi x\le 2\pi x\cos(2\pi x)\le 2\pi x$ 이므로

$e^x\left(\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)\right) < e^x(2\pi x+2\pi)$ 이다.

$\therefore \int_0^{2023} e^x\left(\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)\right)dx$

$< \int_0^{2023} 2\pi e^x(x+1)\,dx = \Big[2\pi xe^x\Big]_0^{2023}$

$= 4046\pi e^{2023}$ 이다.

$\therefore \underline{\int_0^{2023} g(x)\,dx < 4046\pi e^{2023}}$ //.

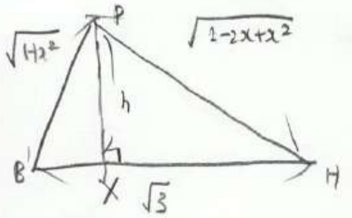
이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.

$\overline{AP}=x$라 하면 $\overline{BH}=\sqrt{3}$, $\overline{BP}=\sqrt{1+x^2}$, $\overline{PH}=\sqrt{1+(1-x)^2}$ 이다.

이때, △PBH의 넓이가 $\frac{\sqrt{5}}{4}$이므로 x에 대해서 다음을 성립한다.



$\triangle PBH = \sqrt{3}h\cdot\frac{1}{2}$ 이므로 h는 $\frac{\sqrt{21}}{6}$ 이다.

피타고라스의 정리에 의해 다음을 성립한다.

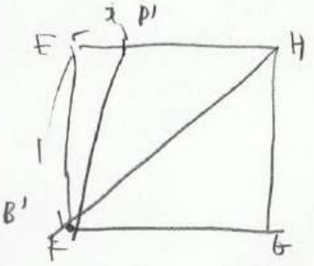
$(\overline{BX}^2 = -\overline{PX}^2+\overline{PB}^2,\ \ \overline{XH}^2=\overline{PH}^2-\overline{PX}^2)$

$\overline{BX}+\overline{XH}=\sqrt{3}$ 이므로 x에 대해서 다음을 만족한다.

$$\sqrt{1+x^2-\frac{n}{12}}+\sqrt{2-2x+x^2-\frac{n}{12}}=\sqrt{3}$$

따라서 식을 정리하면 $x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$이다. $\overline{AP}\le\overline{PD}$이므로

$x=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$임을 알 수 있고 △BPH를 펼면 EFGH에 위로 정사영 시켰을 때의 모양은 다음과 같다.



삼각형 B'P'H가 정사영시킨 도형이므로 정사영의 넓이는 다음을 성립한다.

$$\triangle B'P'H=(1-x)\cdot1\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{2+\sqrt{2}}{8}\ \text{이다.}$$

2.

A_{n+1}는 A_n에서 $n+1$ 길을 적어도 하나 포함시키며 삼각부등식을 만족시키는 경우의 수 α_n를 더한 값으로 다음을 성립한다.

$$A_{n+1}=A_n+\alpha_n$$

i) $n=2k$ (k는 정수)일 때 (삼각부등식을 성립하는 a, b의 경우의 수)

$(n+1,\ a,\ b)$ $(a,b)=(1,\ n+1)$

$(2,\ n+1),\ (2,\ n)$

$(3,\ n+1)\ \cdots\ (3,\ n-1)$

[삼각부등식은 어느 두변의 합도 나머지 한변의 길이보다 긴 것을 의미한다.]

$(a,b)=(4,\ n+1)\ \cdots\ (4,\ n-2)$

$\vdots$

$(k,\ n+1)\sim(k,\ k+2)$

$(k+1,\ n+1)\sim(k+1,\ k+1)$

$(k+2,\ n+1)\sim(k+2,\ k+2)$

$\vdots$

$(n+1,\ n+1)$

따라서 $\alpha_{2k}=3n+1+3k+3(2k)(k-1)$

$=3n+1+6k^2-3k$

$=3n+1+6\left(\frac{n}{2}\right)^2-\frac{3}{2}n$

$=\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$ 을 성립한다.

$A_{n+1}-A_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$ 이다.

3.

$f(x)$는 $x=\alpha\ (\alpha>1)$에서 1.9보다 작은 최소값을 가지므로 $n=3m$일 때 다음을 성립한다.

$$\alpha^{-\frac{2}{3}}(\alpha+1)<1.9,\quad \alpha^{-\frac{2}{3}\cdot3m}(\alpha+1)^{3m}<(1.9)^{3m}$$

$$(1.9)^{3m}>\frac{(\alpha+1)^{3m}}{\alpha^{2m}}=\frac{\sum_{k=0}^{3m}{}_{3m}C_k\,\alpha^k}{\alpha^{2m}}$$

$$=\sum_{k=0}^{2m}{}_{3m}C_k\,\alpha^{k-2m}+\sum_{k=2m}^{3m}{}_{3m}C_k\,\alpha^{k-2m}$$

$$>\sum_{k=2m}^{3m}{}_{3m}C_k\,\alpha^{k-2m}$$

$[k-2m=p]$ $$=\sum_{p=0}^{m}{}_{3m}C_{p+2m}\,\alpha^p$$

$[{}_{3m}C_{p+2m}={}_{3m}C_{m-p}]$ $$=\sum_{p=0}^{m}{}_{3m}C_{m-p}\,\alpha^p\quad(\alpha>1)$$

$$>\sum_{p=0}^{m}{}_{3m}C_{m-p}=\sum_{p=0}^{m}{}_{3m}C_p$$

따라서 3의 배수인 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=0}^{\frac{n}{3}}{}_nC_k<(1.9)^n$를 성립한다.