한양대학교 2023학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

오전-1번

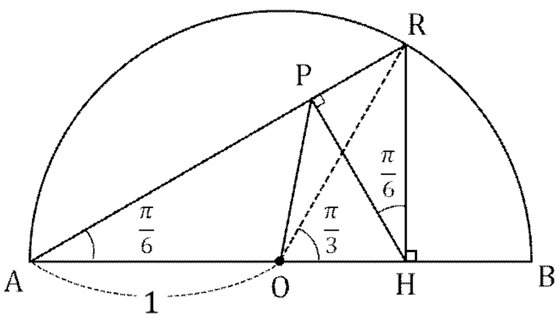
1. 오른쪽 그림에서

$\overline{\mathrm{AR}}^2 = 1^2 + 1^2 - 2\times 1\times 1\times cos\frac{2\pi}{3} = 3$ 이다.

$\overline{\mathrm{AR}} = \sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{RH}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{\mathrm{PR}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

이고 따라서

$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$ 이다.



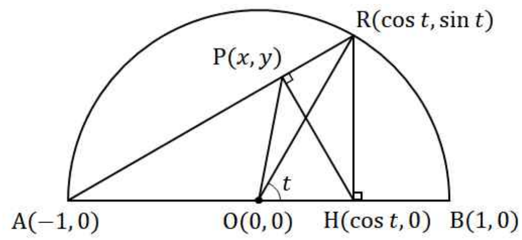
$\overline{\mathrm{OP}}^2 = \overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{OA}}^2 - 2\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\cos\frac{\pi}{6} = \left(\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 - 2\times\frac{3}{4}\sqrt{3}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{16}$

$\overline{\mathrm{BP}}^2 = \overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{AB}}^2 - 2\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\cos\frac{\pi}{6} = \left(\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 - 2\times\frac{3}{4}\sqrt{3}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{19}{16}$

따라서 $\overline{\mathrm{OP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 = \frac{7}{16} + \frac{19}{16} = \frac{13}{8}$

답 : $\frac{13}{8}$

2. 지름의 양 끝점이 $\mathrm{A}(-1,0)$, $\mathrm{B}(1,0)$가 되고, 호 AB가 x축 윗부분에 오도록 반원을 좌표평면에 두자.
$\angle\mathrm{ROB} = t$ $(0\le t\le\pi)$라 하면, $\mathrm{R}(\cos t,\ \sin t)$, $\mathrm{H}(\cos t, 0)$이라 할 수 있다.
$0 < t < \pi$일 때, 두 점 $\mathrm{A}(-1,0)$, $\mathrm{R}(\cos t,\ \sin t)$를 지나는 직선의 방정식은



$$y - 0 = \frac{\sin t - 0}{\cos t - (-1)}(x - (-1))$$

이고, 점 H를 지나고 선분 AR에 수직인 직선의 방정식은

$$y - 0 = -\frac{1+\cos t}{\sin t}(x - \cos t)$$

이다. 점 P는 이 두 직선의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립해서 풀면, 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 좌표는 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\cos^2 t + 2\cos t - 1) \\ y = \frac{1}{2}\sin t\,(1+\cos t) \end{cases}$$

($t = 0$이면 $\mathrm{P} = \mathrm{B}$, $t = \pi$이면 $\mathrm{P} = \mathrm{A}$이다.)

따라서 $\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\cos^2 t + 2\cos t - 1)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin t(1+\cos t)\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\cos^3 t + \cos^2 t - \cos t + 1)}$

이고, $f(t) = \cos^3 t + \cos^2 t - \cos t + 1$이라 하면, $f'(t) = -\sin t\,(\cos t + 1)(3\cos t - 1)$이고,
$0\le t\le\pi$일 때 $-1\le cos\,t\le 1$이므로, 오른쪽 표에서 $f(t)$의 최솟값은
$t = \alpha$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$일 때, $f(t) = \frac{22}{27}$이다.

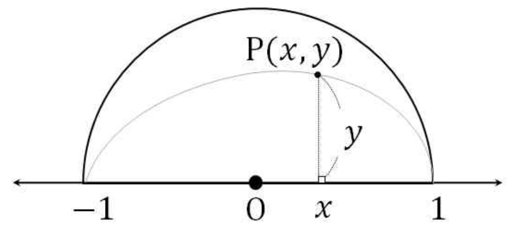
t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$\cos t$	1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	-1
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(t)$	2	$\searrow$	$\frac{22}{27}$	$\nearrow$	2

따라서 구하는 $\overline{\mathrm{OP}}$의 최솟값은 $\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{22}{27}} = \frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{33}}{9}$ 이다

답 : $\frac{\sqrt{33}}{9}$

3. 2번에서 구한 $\mathrm{P}(x, y)$의 좌표로부터, $\cos t = -1 + \sqrt{2+2x}$이고,

$$y^2 = \left(\frac{1}{2}\sin t\,(1+\cos t)\right)^2 = \frac{1}{4}(1-\cos t)(1+\cos t)^3$$
$$= \frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2+2x}\right)\left(\sqrt{2+2x}\right)^3 = \sqrt{2}\,(1+x)^{\frac{3}{2}} - (1+x)^2$$



이다. $-1\le x\le 1$이므로 구하는 부피는

$$\int_{-1}^{1} y^2\,dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{2}(1+x)^{\frac{3}{2}}dx - \int_{-1}^{1}(1+x)^2 dx = \left[\frac{2\sqrt{2}}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(1+x)^3\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{15}$$ 이다.

답 : $\frac{8}{15}$

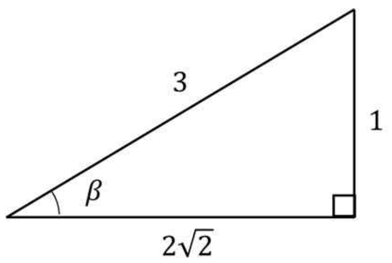
한양대학교 2023학년도 신입학전형 수시

자 연 계 | **논 술 예 시 답 안** | **오전-2번**

1. $t=\sin x$ 로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=0, x=\beta$ 일 때 $t=\sin\beta$ 이므로

$\dfrac{a_n}{n+1}=\displaystyle\int_0^{\beta}(\sin x)^n\cos x dx=\int_0^{\sin\beta}t^n dt=\dfrac{(\sin\beta)^{n+1}}{n+1}$ 이기에 $a_n=(\sin\beta)^{n+1}$ 을 얻는다. 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $(\sin\beta)^2$ 이고 공비가 $\sin\beta$ 인 등비수열이다. 주어진 $0<\beta<\pi/2$ 에서 $0<\sin\beta<1$ 이므로 주어진 등비급수는 수렴하고, 그 합은 $\dfrac{(\sin\beta)^2}{1-\sin\beta}$ 이다.

$\dfrac{(\sin\beta)^2}{1-\sin\beta}=\dfrac{1}{6}\Rightarrow 6(\sin\beta)^2=1-\sin\beta$, $y=\sin\beta$ 라고 할 때, $6y^2+y-1=(3y-1)(2y+1)=0$ 이 성립하는 $y=\dfrac{1}{3}$, 즉, $\sin\beta=\dfrac{1}{3}$.



그러므로 $\tan\beta=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

답 : $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

2. 모집단의 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$ 을 따르므로 크기가 n 인 표본의 표본평균 $\overline{X}$ 는 $\mathrm{N}\left(m,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ 을 따른다. 정규분포의 확률밀도함수 $f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=m$ 에 대하여 좌우 대칭인 종 모양의 곡선이다. 조건 (가)에서 $\mathrm{P}(X\geq 8)+\mathrm{P}(\overline{X}\geq 8)=1$ 이므로 $m=8$ 이다.
두 확률변수 $Z_1=\dfrac{X-8}{\sigma}$, $Z_2=\dfrac{\overline{X}-8}{\sigma/\sqrt{n}}$ 은 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$ 을 따르고 확률밀도함수 $f(z)$ 의 그래프는 직선 $z=0$ 에 대하여 좌우 대칭인 종 모양의 곡선이다. 조건 (나)에서 $\mathrm{P}(X\geq 12)+\mathrm{P}(\overline{X}\geq 7.5)=1$ 이므로 $\mathrm{P}\left(Z_1\geq\dfrac{12-8}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z_2\geq\dfrac{7.5-8}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=1$ 이다. 즉, $\dfrac{4}{\sigma}=\dfrac{0.5\sqrt{n}}{\sigma}$ 이므로 $n=64$ 이다.
m 에 대한 신뢰도 $95.44\,\%$의 신뢰구간은 $\overline{x}-2\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{64}}\leq m\leq\overline{x}+2\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{64}}$ 이고 조건 (다)에서 $\overline{x}-1\leq m\leq\overline{x}+1$ 이므로 $2\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{64}}=1$ 이다. 즉, $\sigma=4$ 이다. 따라서 $m+\sigma+n=8+4+64=76$ 이다.

답 : 76

3. 이항정리를 이용하여 $\{p+(1-p)\}^{2023}$ 와 $\{p+(p-1)\}^{2023}$ 을 각각 전개하면 다음과 같다.

$$\{p+(1-p)\}^{2023}=\sum_{k=0}^{2023}{}_{2023}\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{2023-k}$$

$$\{p+(p-1)\}^{2023}=\sum_{k=0}^{2023}{}_{2023}\mathrm{C}_k p^k(p-1)^{2023-k}=\sum_{k=0}^{2023}{}_{2023}\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{2023-k}(-1)^{2023-k}$$

여기서 $(-1)^{2023-k}$ 의 값은 k가 홀수이면 1, k가 짝수이면 -1 을 가진다.

이때 $\{p+(1-p)\}^{2023}-\{p+(p-1)\}^{2023}$ 을 계산하면

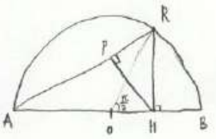
$$\begin{aligned}1-(2p-1)^{2023}&=\sum_{k=0}^{2023}{}_{2023}\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{2023-k}-\sum_{k=0}^{2023}{}_{2023}\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{2023-k}(-1)^{2023-k}\\&=2\sum_{j=0}^{1011}{}_{2023}\mathrm{C}_{2j}p^{2j}(1-p)^{2023-2j}\end{aligned}$$

이 된다. 즉, $1-(2p-1)^{2023}=2\displaystyle\sum_{j=0}^{1011}{}_{2023}\mathrm{C}_{2j}p^{2j}(1-p)^{2023-2j}$ 는 윷짝 한 개를 2023번을 던졌을 때 평평한 면이 나온 횟수가 짝수일 확률의 2배와 같다. 따라서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{(2p-1)^{2023}}{2}$ 또는 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{(1-2p)^{2023}}{2}$ 이다.

답 : $\dfrac{1}{2}-\dfrac{(2p-1)^{2023}}{2}$ **또는** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{(1-2p)^{2023}}{2}$

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.



$\triangle ROH$ 에서 $\overline{OR} = 1$, $\angle ROH = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$\overline{OH} = \frac{1}{2}$ 이다.

또한, 호 RB에 대한 중심각이 $\frac{\pi}{3}$ 이므로

원주각은 $\frac{\pi}{6}$ 이다. 따라서 $\angle PAH = \frac{\pi}{6}$ 이다.

$\triangle PAH$ 에서 $\overline{AH} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $\angle PAH = \frac{\pi}{6}$ 이므로 $\overline{AP} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$ 이 된다.

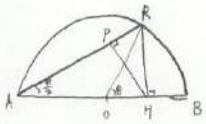
$\triangle OAP$ 에서 코사인 법칙에 의해, $\overline{OP}^2 = \frac{27}{16} + 1 - 2 \times \frac{3}{4}\sqrt{3} \times 1 \times \cos\frac{\pi}{6}$

$= \frac{7}{16}$ 이고,

$\triangle ABP$ 에서 코사인 법칙에 의해, $\overline{BP}^2 = \frac{27}{16} + 4 - 2 \times \frac{3}{4}\sqrt{3} \times 2 \times \cos\frac{\pi}{6}$

$= \frac{19}{16}$ 이므로 $\overline{OP}^2 + \overline{BP}^2 = \frac{13}{8}$ 이다.

2.



$\angle ROB = \theta$ 라고 하면, $\angle RAH = \frac{\theta}{2}$ 이고

$\triangle ROH$ 에서 $\overline{OR} = 1$, $\angle ROH = \theta$ 이므로

$\overline{OH} = \cos\theta$ 이다. (단, $0 < \theta < \pi$)

$\triangle APH$ 에서 $\overline{AH} = 1 + \cos\theta$, $\angle RAH = \frac{\theta}{2}$ 이므로 $\overline{AP} = \cos\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)$ 이다.

$\triangle AOP$ 에서 코사인법칙에 의해

$\overline{OP}^2 = 1 + \cos^2\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)^2 - 2 \times 1 \times \cos\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}$

$= \cos^2\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)\{(1+\cos\theta) - 2\} + 1$

$= \cos^2\frac{\theta}{2}(\cos^2\theta - 1) + 1$

$= -\sin^2\theta\cos^2\frac{\theta}{2} + 1 = -4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^4\frac{\theta}{2} + 1 = 4\cos^6\frac{\theta}{2} - 4\cos^4\frac{\theta}{2} + 1$

이다. $\cos^2\frac{\theta}{2} = X$ (단, $0 < X < 1$) 라고 하면

$\overline{OP}^2 = 4X^3 - 4X^2 + 1$ 이다. $f(X) = 4X^3 - 4X + 1$ 이라고 하고

양변을 X에 대해 미분하면 $f'(X) = 12X^2 - 8X$ 이므로

$f(x)$는 $X = 0$ 에서 극대, $X = \frac{2}{3}$ 에서 극소를 갖는다.

따라서 $0 \le X \le 1$ 에서 $f(X) \ge f(\frac{2}{3}) = \frac{11}{27}$ 이므로

$\overline{OP}$ 의 최솟값은 $\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{33}}{9}$ 이다.

3. $\angle ROB = \theta$ 라고 하고, 점 O를 $(0, 0)$ 으로 나타내면

$A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $R(\cos\theta, \sin\theta)$, $H(\cos\theta, 0)$ 이다.

직선 $\overline{AR}$ 의 방정식은 $y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1}(x+1)$ 이므로

점 P의 x좌표를 a라고 하면 점 $P\left(a, \frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}(a+1)\right)$ 이다.

문제 1-2 에서 $\overline{AP} = \cos\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)$ 이므로

$\overline{AP}^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)^2 = (a+1)^2 + \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}\right)^2(a+1)^2$ 이다.

$(a+1)^2\left\{1 + \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}\right)^2\right\} = \cos^2\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)^2$,

$(a+1)^2 = \frac{1}{2} \times \cos^2\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)^3 = \frac{1}{2} \times \cos^2\frac{\theta}{2} \times 8\cos^6\frac{\theta}{2}$

$= 4\cos^8\frac{\theta}{2}$ 이므로 $a = 2\cos^4\frac{\theta}{2} - 1$ 이다.

따라서 $P\left(2\cos^4\frac{\theta}{2} - 1, \sin\theta\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$ 이다.

$2\cos^4\frac{\theta}{2} - 1 = t$ 일 때, $\sin\theta\cos^2\frac{\theta}{2} = 2\sqrt{\left(\frac{t+1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{t+1}{2}\right)^2}$ 이므로

입체도형의 부피는

$\int_{-1}^{1}\left\{4\left(\frac{t+1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 4 \times \left(\frac{t+1}{2}\right)^2\right\}dt$

$= \left[\frac{2\sqrt{2}}{5}(t+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(t+1)^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \times 2^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} \times 2^3$

$= \frac{8}{15}$ 이다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1\. $\angle ROB = \frac{\pi}{3}$ 일때, 삼각형 ROB는 한변의 길이가 1인 정삼각형이므로

$\overline{OH} = \frac{1}{2}$, $\overline{AH} = \frac{3}{2}$, $\overline{PH} = \frac{3}{4}$, $\overline{PA} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ 이다. 이때, 삼각형PBR

은 $\angle PRB = 90°$인 직각삼각형이고 $\overline{PR} = \overline{AR} - \overline{PA} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $\overline{BR} = 1$ 이므로

$\overline{BP}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{BR}^2 = \frac{3}{16} + 1 = \frac{19}{16}$ 이다.

삼각형 POH 에서 $\angle PHO = \frac{\pi}{3}$ 이므로 코사인법칙을 이용하여

$$\overline{OP}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{PH}^2 - 2 \times \overline{OH} \times \overline{PH} \times \cos(\angle PHO)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{9}{16} - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{4+9-6}{16} = \frac{7}{16}$$ 이다.

따라서 $\overline{OP}^2 = \frac{7}{16}$, $\overline{BP}^2 = \frac{19}{16}$ 이므로 $\overline{OP}^2 + \overline{BP}^2 = \frac{26}{16} = \frac{13}{8}$ 이다.

2\. $\angle RAB = \theta$ 라 할때, $\angle RHA = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이고 $\overline{AR} = 2\cos\theta$,

$\overline{RH} = 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$, $\overline{PR} = \sin\theta\sin 2\theta$.

$\overline{PH} = \cos\theta\sin 2\theta$, $\overline{OH} = 2\cos\theta\cos\theta - 1 = \cos 2\theta$ 이다.

이때, 코사인법칙을 이용하여 $\overline{OP}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{PH}^2 - 2\overline{OH} \times \overline{PH} \times \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ 이므로

이를 정리하면 $\overline{OP}^2 = 4\cos^6\theta - 4\cos^4\theta + 1$ 이다.

$\cos\theta = t$ $(0<t<1)$ 로 치환하고 치환한식을 $f(t)$라 할때

$f(t) = 4t^6 - 4t^4 + 1$ 로 나타낼수 있다. $f(t) = \overline{OP}^2$ 이므로 $f(t)$의

최솟값이 $\overline{OP}^2$의 최솟값이 되고, $\overline{OP}$의 최솟값이 된다

$f'(t) = 24t^5 - 16t^3$ 이고 $\quad t < \frac{\sqrt{6}}{3}$ 일때 $f'(t) < 0$ 이고

$\quad = 8t^3(3t^2 - 2) \quad t > \frac{\sqrt{6}}{3}$ 일때 $f'(t) > 0$ 이므로

$f(t)$는 $t = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 일때 극솟값 즉 최솟값을 갖는다

따라서 $f(\frac{\sqrt{6}}{3}) = \frac{11}{27}$ 이므로 $\overline{OP}$의 최솟값은 $\sqrt{\frac{11}{27}} = \frac{\sqrt{33}}{9}$ 이다.

3\. 선분AB를 x축, 점O를 원점이라 할때, 점P에서

x축에 내린 수선의 발을 M이라 하면 문제에서 주어진 입체도형의

한변의 길이는 $\overline{PM}$의 길이와 같다.

앞서 구한 $\overline{PH} = \cos\theta\sin 2\theta$, $\overline{OH} = \cos 2\theta$, $\angle PHO = \frac{\pi}{2} - \theta$ 를 이용하여

$\frac{1}{2} \times \overline{PM} \times \overline{OH} = \frac{1}{2} \times \overline{PH} \times \overline{OH} \times \sin(\angle PHO)$ 를 계산하면

$\overline{PM} = \cos^2\theta\sin 2\theta = 2\cos^3\theta\sin\theta$ 이다.

점$P(x, y)$라 할때 원점과 점P사이의 거리, 즉 $\overline{OP} = \sqrt{x^2+y^2}$ 이고

문제2에서 구한것과 같이 $\overline{OP} = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4\cos^6\theta - 4\cos^4\theta + 1}$ 이라

할수있다 또한 $y = \overline{PM}$ 이므로 이를 정리하면

$$x^2 = 4\cos^8\theta - 4\cos^4\theta + 1$$

$$= (2\cos^4\theta - 1)^2$$ 이라 할수있고

$x = 2\cos^4\theta - 1$ 라 할수 있다.

따라서 입체도형의 부피는 $\int_{-1}^{1} (\cos^2\theta\sin 2\theta)^2 dx = \int_{-1}^{1} \cos^4\theta\sin^2 2\theta\, dx$

$$\begin{cases} \cos^4\theta = \frac{x+1}{2} \\ \cos^2\theta = \sqrt{\frac{x+1}{2}} \\ \cos^6\theta = \frac{x+1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{2}} \\ \cos^8\theta = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$\frac{x+1}{2} = t$ 로 치환하여 계산하면

$$= \int_{-1}^{1} (4\cos^6\theta - 4\cos^8\theta)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(4 \times \frac{x+1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{2}} - 4\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right) dx$$

$$= \int_{0}^{1} (4t\sqrt{t} - 4t^2)\,2\,dt$$

$$= 8\int_{0}^{1} (t\sqrt{t} - t^2)\,dt$$

$$= 8\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 8 \times \frac{6-5}{15} = \frac{8}{15}$$ 이다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ 이므로 $\int_0^\beta \sin^n x \cos x\,dx = \left[\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x\right]_0^\beta$

이다. $\left[\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x\right]_0^\beta = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1}\beta = \frac{a_n}{n+1}$

따라서 $a_n = \sin^{n+1}\beta$ 이고 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $0<\sin\beta<1$ 이며

따라서 a_n은 공비가 양수인 등비수열이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{\sin^2\beta}{1-\sin\beta} = \frac{1}{6}$ 이다.

$6\sin^2\beta + \sin\beta - 1 = 0$, $(2\sin\beta+1)(3\sin\beta-1) = 0$

이므로 $\sin\beta = \frac{1}{3}$ 이다. 따라서 $\tan\beta = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 이다

$\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$

2. 표본평균의 평균은 모평균과 같으므로 X가 (m, σ^2)을 따를 때

$\overline{X}$는 $\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다

(가)에서 m이 8보다 작으면 $P(X\geq 8)<0.5$, $P(\overline{X}\geq 8)<0.5$

이므로 합이 1이 될 수 없고 8보다 클 때는 합이 1보다 크므로

$m=8$이다.

(나)의 확률은 각각 $P\left(Z\geq \frac{4}{\sigma}\right) + P\left(Z\geq -\frac{\sqrt{n}}{2\sigma}\right)$ 과 같고

합이 1이 되려면 $\frac{4}{\sigma} = \frac{\sqrt{n}}{2\sigma}$ 이어야 한다.

따라서 $n=64$ 이다.

(다)에서 1이라는 값은 $2.0 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1$ 이므로

$\sigma = \frac{\sqrt{n}}{2} = \frac{\sqrt{64}}{2} = 4$ 이다

따라서 $m+\sigma+n = 8+4+64 = 76$ 이다

3. $1-p=q$라 할 때 구하는 확률은

${}_{2023}C_0\,p^0q^{2023} + {}_{2023}C_2\,p^2q^{2021} + \cdots + {}_{2023}C_{2022}\,p^{2022}q^1$

이다. 이항정리에 의해

$\underline{(p+q)^{2023}}_{①} = {}_{2023}C_0\,p^0q^{2023} + {}_{2023}C_1\,p^1q^{2022} + {}_{2023}C_2\,p^2q^{2021} + \cdots + {}_{2023}C_{2023}\,p^{2023}q^0$

$\underline{(-p+q)^{2023}}_{②} = {}_{2023}C_0\,p^0q^{2023} - {}_{2023}C_1\,p^1q^{2022} + {}_{2024}C_2\,p^2q^{2021} + \cdots - {}_{2023}C_{2023}\,p^{2023}q^0$

이므로 ①과 ②를 더해준 뒤 2로 나누면

구하는 값이 나온다.

$$\frac{1+(1-2p)^{2023}}{2} = {}_{2023}C_0\,p^0q^{2023} + {}_{2023}C_2\,p^2q^{2021} + \cdots + {}_{2023}C_{2022}\,p^{2022}q^1$$

이다.

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $\frac{a_n}{n+1} = \int_0^{\beta} \sin^n x \cos x \, dx$

$\sin x = t$로 치환하면, $\cos x = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$\frac{a_n}{n+1} = \int_0^{\sin\beta} t^n \, dx$

$\frac{a_n}{n+1} = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^{\sin\beta}$

$\frac{a_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}(\sin\beta)^{n+1} \Rightarrow a_n = (\sin\beta)^{n+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{6}$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 으로 수렴해야 하는데 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ 이므로

$0<\sin\beta<1$ 이다 따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 으로 수렴한다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 첫째항이 $\sin\beta^2$, 공비가 $\sin\beta$ 인 등비수열로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\sin^2\beta}{1-\sin\beta} = \frac{1}{6}$ 이다.

$6\sin^2\beta = 1-\sin\beta$

$6\sin^2\beta + \sin\beta - 1 = 0$

$(2\sin\beta+1)(3\sin\beta-1) = 0$ $\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin\beta = \frac{1}{3}$

$\cos\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이다 따라서 $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

2. $X \sim (m, \sigma^2)$

$\overline{X} \sim \left(m, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다

$P(X \geq 8) + P(\overline{X} \geq 8) = 1$

$= P\left(Z \geq \frac{8-m}{\sigma}\right) + P\left(Z \geq \frac{8-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1$ — (가)

$P(X \geq 12) + P(\overline{X} \geq 7.75) = 1$

$\Rightarrow P\left(Z \geq \frac{12-m}{\sigma}\right) + P\left(Z \geq \frac{7.75-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1$ — (나)

정규분포는 대칭성을 이루고 (가)와 (나)의 두 식의 합이 1을 이루므로

0을 기준으로 대칭이다 따라서 $m = 8$ ($\because$ 식(가) 통해)

(나) $P\left(Z \geq \frac{4}{\sigma}\right) + P\left(Z \geq \frac{-0.25}{\sigma}\sqrt{n}\right) = 1$

$\sqrt{n} = 8$ 이므로 $n = 64$

조건 (다)는 통해 표준편차는 구할 수 있다

$\overline{X} \sim \left(8, \left(\frac{\sigma}{8}\right)^2\right)$ 의 정규분포를 따르고

$P(0 \leq Z \leq 2.0) = 0.4772$ 이므로

신뢰도 95.44%의 신뢰구간은 $P(-2 \leq Z \leq 2)$ 일 때 정은 난수

있다. 크기의 맞는 신뢰구간은

$8 - 2.0\frac{\sigma}{8} \leq m \leq 8 + 2.0\frac{\sigma}{8}$ 이다 이때 신뢰구간이

$\overline{X}-1 \leq m \leq \overline{X}+1$ 이므로 $\sigma = 4$ 임을 알 수 있다

따라서 $m+\sigma+n = 8+64+4 = 76$ 이다.

3. 모양평한 면이 나온 횟수가 짝수일 확률은 이항정리를 사용하면

$_{2023}C_0 \, p^0 (1-p)^{2023} + {}_{2023}C_2 \, p^2 (1-p)^{2021}$

$+ {}_{2023}C_4 \, p^4 (1-p)^{2019} + \cdots + {}_{2023}C_{2022} \, p^{2022} (1-p)^1$ 이다.

이항정리를 이용하면

$(p+1-p)^{2023}$

$\Rightarrow {}_{2023}C_0 \, p^0 (1-p)^{2023} + {}_{2023}C_1 \, p^1 (1-p)^{2022} + \cdots + {}_{2023}C_{2023} \, p^{2023} (1-p)^0 = 1$

마찬가지로

$(p-(1-p))^{2023} =$

$\Rightarrow -{}_{2023}C_0 \, p^0 (1-p)^{2023} + {}_{2023}C_1 \, p^1 (1-p)^{2022} - {}_{2023}C_2 \, p^2 (1-p)^{2021}$

$\cdots + {}_{2023}C_{2023} \, p^{2023} = (2p-1)^{2023}$

$(p+1-p)^{2023} - (p-(1-p))^{2023} = 2\left({}_{2023}C_0 \, p^0 (1-p)^{2023} + {}_{2023}C_2 \, p^2 (1-p)^{2021} \cdots + {}_{2023}C_{2022} \, p^{2022} (1-p)^1\right)$ 이다

$\frac{1-(2p-1)^{2023}}{2} = \left({}_{2023}C_0 \, p^0 (1-p)^{2023} + \cdots + {}_{2023}C_{2022} \, p^{2022} (1-p)^1\right)$

이다

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨