한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

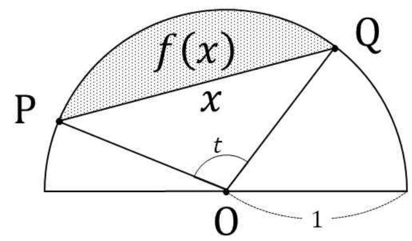
오후(2)-1번

1. 동전을 x번 던질 때 처음으로 같은 면이 두 번 연속으로 나오는 사건을 A_x 라고 하자. 동전을 한 번 던질 경우 같은 면이 연속으로 두 번 나오게 되는 사건은 불가능하다. 즉 동전을 1번 던질 때 같은 면이 두 번 연속으로 나오는 확률은 $\mathrm{P}(A_1)=0$이다. 동전을 두 번 던질 경우, 4가지의 결과 중 2가지, (앞면, 앞면), (뒷면, 뒷면)과 같이 동전의 같은 면을 두 번 연속으로 얻을 수 있다. 따라서 사건 A_2가 일어날 확률은 $\mathrm{P}(A_2)=2/4=1/2=0.5^{2-1}$이 된다.
유사하게, 우리가 전 단계에서 멈추지 않고 동전을 계속 던진 경우에는 정확하게 결과들의 절반만큼 같은 면이 두 번 연속으로 나오는 것을 알 수 있다. 즉, 다음이 성립한다.

$\mathrm{P}(A_3)=\mathrm{P}(A_2)/2=0.5^{3-1}$
$\mathrm{P}(A_4)=\mathrm{P}(A_3)/2=0.5^{4-1}$
$\vdots$
$\mathrm{P}(A_x)=\mathrm{P}(A_{x-1})/2=0.5^{x-1}, x=2,3,\cdots,2022.$

따라서 동전을 던진 횟수가 2022 이하일 확률은 $\displaystyle\sum_{x=2}^{2022}\mathrm{P}(A_x)=\sum_{x=2}^{2022}0.5^{x-1}$이 되고 이는 첫째항이 0.5, 공비가 0.5인 등비수열을 첫째항부터 제 2021항까지 더한 것과 같다. 따라서 등비수열의 합은 $\dfrac{0.5(1-0.5^{2021})}{1-0.5}=1-0.5^{2021}$이 된다.

2. 선분 AB의 중점을 O라 하자. 부채꼴 OPQ의 중심각을 $t\ (0<t<\pi)$라 하면,



$x=\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos t}=\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}$,
$y=f(x)=\dfrac{1}{2}\times1^2\times t-\dfrac{1}{2}\times1^2\times\sin t=\dfrac{1}{2}(t-\sin t)$ 이다.

$t=\dfrac{\pi}{3}$일 때 $x=1$이므로

$x=1$에서의 $f(x)$의 미분계수 $f'(1)$은 $t=\dfrac{\pi}{3}$일 때 $\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$의 값이다.

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1-\cos t}{2}$, $\quad\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\sin t}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}}$ 이므로, $f'(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 이다.

3. $f'(x)=\dfrac{1}{(x+e)\ln(x+e)}$ 이고 이를 한 번 더 미분하면

$$f''(x)=-\frac{1+\ln(x+e)}{(x+e)^2(\ln(x+e))^2}$$

이므로 모든 $x>0$에 대해 $f''(x)<0$이다. 즉, f'은 감소한다.
일반성을 잃지 않고 $a\ge b$라 가정하자. 그러면 평균값 정리에 의해 $\dfrac{f(a+b)-f(a)}{b}=f'(z)$인 z가 열린 구간 $(a,a+b)$에서 항상 존재하고, $\dfrac{f(b)}{b}=\dfrac{f(b)-f(0)}{b-0}=f'(w)$인 w가 열린 구간 $(0,b)$에서 항상 존재한다.
그런데 $0<w<b\le a<z<a+b$이므로 $w<z$, 따라서 $f'(w)>f'(z)$임을 알 수 있다. 이를 정리하면 $f(a+b)<f(a)+f(b)$를 얻는다.

	한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시	
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(2)-2번

1. 주어진 쌍곡선을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$으로 표현하면

$a^2=\frac{5}{2},\ b^2=\frac{27}{2}$.

따라서 초점 F의 x좌표를 양수 c라 하면 $c=\sqrt{a^2+b^2}=4$

또한 $p=\overline{\mathrm{AF}},\ q=\overline{\mathrm{AF'}}$라 하면, 쌍곡선의 정의와 코사인 법칙에 의하여

$q-p=2a=\sqrt{10}$, $\quad \cos(\angle \mathrm{F'AF})=\frac{7}{25}=\frac{p^2+q^2-8^2}{2pq}$

즉, $q=p+\sqrt{10}$이고 $14pq=25(p^2+q^2-64)$

첫 번째 식을 두 번째 식에 대입하면

$14p^2+14\sqrt{10}p=25(2p^2+2\sqrt{10}p-54)$

정리하면 $2p^2+2\sqrt{10}p-75=0$

그러므로 $p=\frac{3}{2}\sqrt{10}$이고 $q=\frac{5}{2}\sqrt{10}$

점 A의 좌표를 (x_0, y_0)이라고 하면

$\overline{\mathrm{AF'}}^2=\frac{125}{2}=(x_0+4)^2+y_0^2$이고

$\overline{\mathrm{AF}}^2=\frac{45}{2}=(x_0-4)^2+y_0^2$

이를 연립하여 풀면 $x_0=\frac{5}{2},\ y_0=\frac{9}{2}$.

즉, A의 좌표는 $\left(\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$

비슷하게 점 B의 좌표를 구하면 $\left(-\frac{5}{2},-\frac{9}{2}\right)$

2. 점 P의 좌표를 (t,s)라 하면 접선의 기울기는 $-\frac{b^2t}{a^2s}$,

접선의 방정식은 $y-s=-\frac{b^2t}{a^2s}(x-t)$이다.

이를 정리하면 $b^2tx+a^2sy=b^2t^2+a^2s^2$이다.

$\frac{t^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}=1$이므로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$b^2tx+a^2sy-a^2b^2=0$

따라서 $f(t)=\left(\frac{a^2b^2}{\sqrt{b^4t^2+a^4s^2}}\right)^2$이다.

$s^2=\frac{a^2b^2-b^2t^2}{a^2}$이므로

$$f(t)=\frac{a^4b^4}{b^4t^2+a^4\frac{a^2b^2-b^2t^2}{a^2}}=\frac{a^4b^4}{b^4t^2+a^4b^2-a^2b^2t^2}$$

$$=\frac{a^4b^4}{a^4b^2+b^2(b^2-a^2)t^2}=\frac{a^4b^2}{a^4+(b^2-a^2)t^2}$$ 이다.

$a^2-b^2=c^2\ (b<a)$ 중 양수인 c를 선택하면

$$f(t)=\frac{a^4b^2}{a^4-c^2t^2}=\frac{a^4b^2}{2a^2}\left(\frac{1}{a^2-ct}+\frac{1}{a^2+ct}\right)$$이다.

$$\int\frac{1}{a^2+ct}dt=\frac{1}{c}\ln(a^2+ct)+C_1,$$

$$\int\frac{1}{a^2-ct}dt=-\frac{1}{c}\ln(a^2-ct)+C_2$$ (C_1, C_2는 상수)이므로,

$$\int_0^a f(t)dt=\frac{a^4b^2}{2a^2}\frac{1}{c}\left[\ln(a^2+ct)-\ln(a^2-ct)\right]_0^a$$

$$=\frac{a^4b^2}{2a^2c}\ln\frac{a^2+ca}{a^2-ca}\ \cdots(\mathrm{A})$$

$b=\frac{\sqrt{3}}{2}a$이면 $b^2=\frac{3}{4}a^2$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a^2-\frac{3}{4}a^2}=\frac{a}{2}$이다.

따라서 $(\mathrm{A})=\frac{a^2\frac{3}{4}a^2}{2\frac{a}{2}}\ln\frac{a^2+\frac{a^2}{2}}{a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{3}{4}a^3\ln 3$ 이므로

$\frac{1}{a^3}\int_0^a f(t)dt=\frac{3}{4}\ln 3$이다.

3. 문제 2번에서 선택한 양수 c를 사용하여

$\mathrm{F}_1=(c,0)=(\sqrt{a^2-b^2},0)$,

$\mathrm{F}_2=(-c,0)=(-\sqrt{a^2-b^2},0)$이라고 하자.

점 P의 좌표를 (t,s)라 하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PF}_1}^2&=(c-t)^2+s^2\\&=c^2-2ct+t^2+\frac{a^2b^2-b^2t^2}{a^2}\\&=\frac{a^2c^2-2cta^2+a^2t^2+a^2b^2-b^2t^2}{a^2}\\&=\frac{a^2(b^2+c^2)+t^2(a^2-b^2)-2cta^2}{a^2}\\&=\frac{a^4+t^2c^2-2cta^2}{a^2}=\frac{(a^2-tc)^2}{a^2}\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{PF}_2}^2=\frac{(a^2+tc)^2}{a^2}$이다.

따라서 $h(t)=\frac{a^4-t^2c^2}{a^2}$이다.

2번에 의해 $f(t)=\frac{a^4b^2}{a^4+(b^2-a^2)t^2}$이다.

$$\therefore f(t)h(t)=\frac{a^4b^2}{a^4+(b^2-a^2)t^2}\times\frac{a^4-t^2c^2}{a^2}=a^2b^2$$

한양대학교

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:030401)	

답안지 (자연계)

답안지 바코드

316611

수 험 생 유 의 사 항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

동전을 던진 횟수를 확률변수 X라 한다.

∴ 동전을 던진 횟수가 2022 이하일 확률

$= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + \cdots + P(X=2022)$

H: 앞면 T: 뒷면

1. H로 시작할 때
   1) H−H
   2) H−T−T
   3) H−T−H−T−T
   ⋮
2. T로 시작할 때
   1) T−T
   2) T−H−H
   3) T−H−T−T
   ⋮

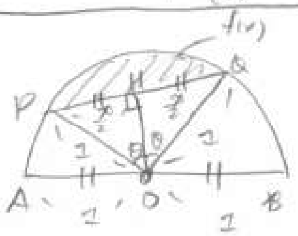
$\therefore P(X=n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + \cdots + P(X=2022)$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2021}$

$= \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2021}\right)}{1-\frac{1}{2}}$

$= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2021}$



H는 반원의 중심 O에서 $\overline{PQ}$에 내린 수선의 발이다.

$\angle POH = \angle QOH = \theta$ 이다.

$\therefore \frac{x}{2} = \sin\theta$, $x = 2\sin\theta$

$f(x) = \frac{1}{2}\times(1)^2\times 2\theta - \frac{1}{2}\times 1^2\times \sin 2\theta$

$= \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta$

$f'(x) = (1-\cos 2\theta)\times \frac{d\theta}{dx}$

$= \dfrac{(1-\cos 2\theta)}{2\cos\theta}$

$\frac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta$

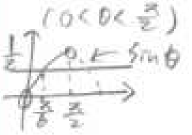
$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2\cos\theta}$

$x=1$ 일 때 $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\frac{1}{2} = \sin\theta$

$(0<2\theta<\pi)$

$(0<\theta<\frac{\pi}{2})$



$\therefore f'(1) = \dfrac{1-\cos\frac{\pi}{3}}{2\cos\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{6}}$

$f(x) = \ln(\ln(x+e))$

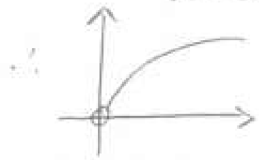
$f'(x) = \frac{1}{x+e}\times\frac{1}{\ln(x+e)} > 0 \quad (\because x>0)$

$f''(x) = \dfrac{-\{\ln(x+e) + (x+e)\times\frac{1}{x+e}\}}{\{(x+e)\ln(x+e)\}^2}$

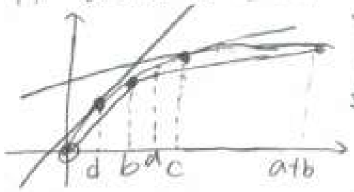
$= \dfrac{-(\ln(x+e)+1)}{\{(x+e)\ln(x+e)\}^2} < 0 \quad (\because x>0)$

$f(0) = 0$

∴



1. $a > b > 0$ 일 때



$f(a+b) < f(a) + f(b)$

$f(a+b) - f(a) < f(b)$

$\dfrac{f(a+b)-f(a)}{a+b-a} < \dfrac{f(b)-f(0)}{b-0}$ $(b>0)$

$(a<c<a+b)$ $\dfrac{f(a+b)-f(a)}{a+b-a} = f'(c)$

$(0<d<b)$ $\dfrac{f(b)-f(0)}{b-0} = f'(d)$

$f''(x)<0$ 이기 때문에 $f'(x)$는 감소한다.

$\therefore f'(c) < f'(d)$ $(c>d$ 이다$)$

$\therefore f(a+b) < f(a) + f(b)$ 이다.

2. $b > a > 0$ 일 때
   위의 경우와 똑같이 적용된다.

3. $0<a=b$

$f(2a) < 2f(a)$

$\dfrac{f(2a)-f(a)}{2a-a} < \dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}$ $(a>0)$

$(a<e<2a)$ $\dfrac{f(2a)-f(a)}{2a-a} = f'(e)$

$(0<h<a)$ $\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0} = f'(h)$

$f''(x)<0$ 이기 때문에 $f'(x)$는 감소한다

$\therefore f'(e) < f'(h)$ 이다 $(e>h)$

∴ 양의 실수 a, b에 대하여 부등식 $f(a+b) < f(a)+f(b)$는 항상 성립한다.

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

311998

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:030401)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

(1) i) 2번에 끝날 확률

(앞,앞), (뒤,뒤)

$2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

ii) 3번에 끝날 확률

(앞,뒤,뒤), (뒤,앞,앞)

$2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

iii) n번에 끝날 확률 (단, $n\le 3000$)

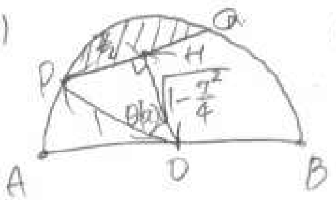
$\underbrace{2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}}_{n\text{개}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

따라서 2022번 이내에 끝날 확률은

$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{2021}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2021}\right)}{1-\frac{1}{2}}$

$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2021}$ 이다.

(2)



반원의 중심을 O라 하자

점 O에서 $\overline{PQ}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{PH}^2}$

$=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ 이다.

$\angle POH=\angle QOH=\theta(x)$ 라 하면

$\sin\theta(x)=\frac{x}{2}$ 이다

$f(x)$는 부채꼴 POQ의 넓이에서 $\triangle POQ$의 넓이를 뺀값과 같으므로

$f(x)=\theta(x)-\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ 임을 알 수 있다.

$f'(x)=\theta'(x)-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+\frac{x^2}{8\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}$ 이고.

$\sin\theta(x)=\frac{x}{2}$ 였으므로 $\theta'(x)\cos\theta(x)=\frac{1}{2}\cdots$ ① 이고

$\sin\theta(1)=\frac{1}{2}$, $0<2\theta(x)<\pi$ 이므로

$\cos\theta(1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

①번식에 대입하면 $\theta'(1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 임을 알 수 있고

$f'(1)=\theta'(1)-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{8\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 이다.

(3) $f(x)$는 두 번 미분 가능하므로

$f'(x)=\frac{1}{(x+e)\ln(x+e)}$

$f''(x)=-\frac{\ln(x+e)+1}{\{(x+e)\ln(x+e)\}^2}$ 이므로

$x>0$일때 $f(x)$는 증가하고 $f'(x)$는 감소함을 알수있다

$f(x)$는 $x\ge 0$에서 연속이고 미분가능하므로

평균값 정리를 만족한다.

i) $a\ge b$

$\frac{f(a+b)-f(a)}{a+b-a}=f'(c_1)$ $(a<c_1<a+b)$

$\frac{f(b)}{b}=f'(c_2)$ $(0<c_2<b)$

$0<c_2<b\le a<c_1$ 이므로 $f'(c_2)>f'(c_1)$ 이고

$\frac{f(a+b)-f(a)}{b}<\frac{f(b)}{b}$ 이므로 $f(a+b)<f(a)+f(b)$가 성립한다.

ii) $a<b$

$\frac{f(a+b)-f(b)}{a+b-b}=f'(c_1)$ $(b<c_1<a+b)$, $\frac{f(a)}{a}=f'(c_2)$ $(0<c_2<a)$

라 하고 (i)과 같은 방법을 이용하면

$\frac{f(a+b)-f(b)}{a}<\frac{f(a)}{a}$ 이므로 $f(a+b)<f(a)+f(b)$가 성립한다

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨