한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	출제 의도 및 평가 지침	오후(2)-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 오후(2) [문제 1]은 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용을 바탕으로 출제되었다. 아래 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

문항1. 주어진 상황에서 사건이 일어나는 경우와 대응하는 확률을 적절하게 파악하고 문제의 확률을 구할 수 있는지 묻고 있다. 등비수열의 합을 사용하여 원하는 확률을 효과적으로 계산할 수 있는지 평가한다.
문항2. 원의 호와 현에 대한 정보를 적절히 분석하고, 코사인법칙 등의 기본적인 도구를 활용할 수 있는지를 묻고 있다. 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 사용하여 원하는 미분계수를 찾아낼 수 있는지를 평가한다.
문항3. 함수 $f(x)$의 성질을 도함수와 이계도함수를 통해 적절히 분석하고, 평균값 정리를 활용하여 부등식을 증명해 낼 수 있는지를 평가한다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	20	동전을 x번 던질 때 같은 면이 두 번 나오는 사건의 확률을 찾아내고, 이 확률과 등비수열의 항 사이의 관계를 파악했는가?	10
		등비수열의 합을 활용하여 문제의 확률을 구했는가?	10
2	40	현 PQ의 길이 x와 현 PQ와 호 PQ로 둘러싸인 도형의 넓이 $f(x)$를 부채꼴의 중심각 t에 대한 매개변수 방정식으로 표현했는가?	20
		매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 사용해서 미분계수 $f'(1)$을 구했는가?	20
3	40	함수 $f(x)$의 도함수와 이계도함수를 계산하여 도함수가 감소함수임을 밝혔는가?	15
		주어진 부등식을 평균값 정리를 이용하여 변형했는가?	15
		도함수가 감소한다는 사실과 평균값 정리를 종합하여 주어진 부등식을 알맞게 증명하였는가?	10

3. 출제 근거

문항 1. **교과서 수학I (천재교육** 이준열 외 9인) - **III 수열 – 1. 등차수열과 등비수열 – 등비수열**
교과서 확률과 통계 (Mirae N 황선욱 외 8인) - **III 통계 – 1. 확률분포 – 확률변수와 확률분포**
문항 2. 교과서 수학I (천재교육 이준열 외 9인) - 삼각함수 - 사인법칙과 코사인법칙
교과서 수학II (좋은책신사고 고성은 외 6인) - 다항함수의 미분법 - 미분계수와 도함수 - 미분계수
교과서 미적분 (미래엔 황선욱 외 8인) - 미분법 - 여러 가지 미분법 - 매개변수로 나타낸 함수의 미분법
문항 3. 교과서 수학 II (미래엔 황선욱 외 8인) - 다항함수의 미분법 - 도함수의 활용 - 평균값 정리
교과서 미적분 (미래엔 황선욱 외 8인) - 미분법 - 도함수의 활용 - 합성함수의 미분법, 이계도함수, 함수의 그래프

자 연 계	한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시 논술고사 **출제 의도 및 평가 지침**	오후(2)-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 오후(2) [문제 2]는 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용을 바탕으로 출제되었다. 아래 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

문항 1은 쌍곡선의 정의와 코사인 법칙을 활용하여 원하는 점의 좌표를 구할 수 있는지를 묻는다.
문항 2는 타원의 접선 방정식을 구한 후 원점으로부터 그 접선까지의 거리를 나타내는 함수를 구하여 이를 정적분하는 문제이다.
문항 3은 타원의 초점으로부터 타원위의 점까지의 거리를 구하여 문항 2에서 얻어진 값과 곱한 결과를 계산하도록 하는 문제이다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	두 점 A, B의 좌표를 정확히 구했는가?	10
		좌표를 구하는 과정이 명료하게 기술되었는가?	20
2	40	묻고 있는 정적분의 값을 정확히 구하였는가?	20
		정적분의 값을 구하는 과정이 명료하게 기술되었는가?	20
3	30	$f(t)\times g(t)$를 a 와 b에 대한 식으로 정확히 나타내었는가?	10
		식을 구하는 과정이 명료하게 기술되었는가?	20

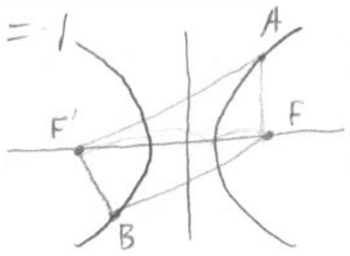
3. 출제 근거

문항 1: 고등학교 수학I (지학사 홍성복 외 10인) - 삼각함수 - 삼각함수의 활용 - 사인법칙과 코사인법칙 (p. 98~100)
고등학교 수학I (천재교육 이준열 외 9인) - 삼각함수 - 사인법칙과 코사인법칙 (p. 102~105)
고등학교 기하 (비상 김원경 외 14인) - 이차곡선 - 이차곡선 - 쌍곡선 (p. 21~25)
고등학교 기하 (미래엔 황선욱 외 8인) - 이차곡선 - 쌍곡선 - 쌍곡선 (p. 42~47)

문항 2: 고등학교 기하(미래앤 황선욱외 8인) p26~35
고등학교 기하(비상 김원경외 14인) p16~20, 39~41
고등학교 미적분(신사고 고성은외 5인) p135
고등학교 미적분(미래앤 황선욱외 8인) p146
문항 3: 고등학교 기하(미래앤 황선욱외 8인) p26~35
고등학교 기하(비상 김원경외 14인) p16~20, 39~41

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{27} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{x^2}{\frac{5}{2}} - \frac{y^2}{\frac{27}{2}} = 1$



$F(4,0),\ F'(-4,0)$

$\overline{AF} = k,\ \overline{AF'} = k + \sqrt{10}$

$\overline{FF'} = 8$

$\cos(\angle FAF') = \frac{7}{25}$

$\frac{7}{25} = \frac{k^2 + (k+\sqrt{10})^2 - 8^2}{2 \cdot k \cdot (k+\sqrt{10})}$ $\quad 2k^2 + 2\sqrt{10}k - 75 = 0$

$k = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ $\quad (k>0)$

$A(a,b)$ $\quad \frac{a^2}{5} - \frac{b^2}{27} = \frac{1}{2}$

$\sqrt{(a-4)^2 + b^2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ $\quad b^2 = \frac{27}{5}a^2 - \frac{27}{2}$

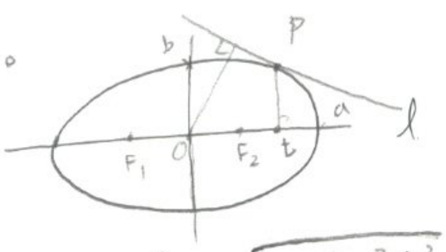
$32a^2 - 40a - 100 = 0$ $\quad (a>0)$ $\quad a = \frac{5}{2}$

$b = \frac{9}{2}$

$\cos(\angle FAF') = \cos(\angle F'BF)$ A 와 B는 원점대칭

$A\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$ $\quad B\left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

2.



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{3a^2} = 1$ $\quad a>b$

$P\left(t, \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{4}t^2}\right)$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{3a^2} - 1 = 0$을 x에 대해 미분 $\frac{2}{a^2}x + \frac{4}{3a^2}2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

점 P에서 $\frac{dy}{dx} = \frac{-3t}{4\sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{4}t^2}}$

직선 l $\quad y = \frac{-3t}{4\sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{4}t^2}}(x-t) + \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{4}t^2}$

$0 = \frac{3}{4}tx + \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{4}t^2}\,y - \frac{3}{4}a^2$

$(0,0)$에서 l까지의 거리 제곱 $= \frac{3a^4}{4a^2 - t^2} = f(t)$

$\frac{1}{a^3}\int_0^a f(t)\,dt = 3\int_0^a \frac{a}{4a^2 - t^2}\,dt = \frac{3}{4}\int_0^a \frac{1}{2a-t} + \frac{1}{2a+t}\,dt$

$= \frac{3}{4}\left[-\ln(2a-t) + \ln(2a+t)\right]_0^a = \frac{3}{4}\ln 3$

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$P\left(t, \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}} \cdot b\right)$

$\frac{2}{a^2}x + \frac{1}{b^2} \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

점 P에서 미분계수 $= \frac{-\frac{b}{a^2}t}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}}}$

직선 l $\quad y = \frac{-\frac{b}{a^2}t}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}}}(x-t) + \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}} \cdot b$

$f(t) = \frac{a^4b^2}{b^2t^2 - a^2t^2 + a^4}$

$F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ $\quad F_2(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$

$\overline{PF_1} = \sqrt{(t + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + \left(\sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}} \cdot b\right)^2}$

$\overline{PF_2} = \sqrt{(t - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + \left(\sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}} \times b\right)^2}$

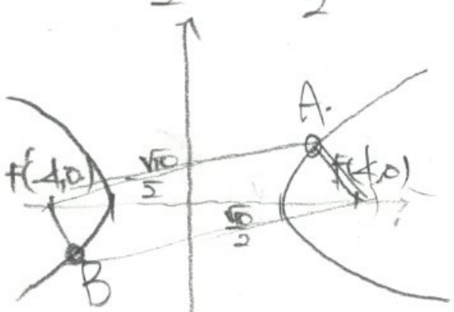
$h(t) = \overline{PF_1} \times \overline{PF_2} = \frac{b^2}{a^2}t^2 - t^2 + a^2 = \frac{1}{a^2}(b^2t^2 - a^2t^2 + a^4)$

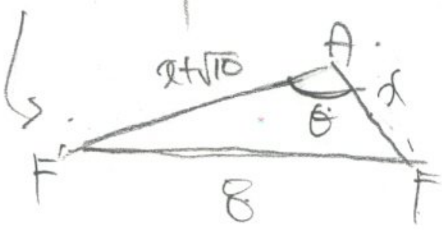
$f(t) \times h(t) = a^2b^2$

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

2.(1) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{27} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{5}{2}} - \frac{y^2}{\frac{27}{2}} = 1$, 초점 $F(4,0)$ $F'(-4,0)$





$\overline{AF} = \alpha$ 라고 할때.
쌍곡선 성질에 의해 $\overline{AF'} = \alpha+\sqrt{10}$

$\cos\theta = \frac{7}{25}$ 이므로 코사인 제 2법칙을 쓰면

$64 = \alpha^2 + (\alpha+\sqrt{10})^2 - 2\alpha(\alpha+\sqrt{10})\cos\theta$

$\Rightarrow 4\alpha^2 + 4\sqrt{10}\alpha - 150 = 0$

$(2\alpha - 3\sqrt{10})(2\alpha + 5\sqrt{10}) = 0$

$\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ ($\because \alpha > 0$ 이므로)

$A(\alpha, \beta)$ 라고 할때

$(\alpha-4)^2 + \beta^2 = \frac{3\sqrt{10}}{2}$

$\frac{\alpha^2}{5} - \frac{\beta^2}{27} = \frac{1}{2}$ 이므로. 둘을 연립해보면

$\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = \frac{9}{2}$ 가 나온다. $A\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$

이때 쌍곡선은 원점에 점대칭이므로

$\boxed{A\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right), \ B\left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)}$ 가 된다.

2.(2) $b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ 이므로. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{3}{4}a^2} = 1$ 이고.

$\frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{\frac{3}{4}a^2}dy = 0$ 이므로 $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x}{4y}$ 가 된다

$P(t, s)$ 라고 할때. $\Rightarrow 3t^2 + 4s^2 = 3a^2$.

$l: y = -\frac{3t}{4s}x + \frac{3t^2}{4s} + s$

$\Rightarrow 3tx + 4sy = 3t^2 + 4s^2$.

$f(t) = \left(\frac{3t^2+4s^2}{\sqrt{9t^2+16s^2}}\right)^2 = \frac{9a^4}{9t^2+16s^2}$.

$s^2 = \frac{3}{4}(a^2 - t^2)$

$= \frac{3a^4}{4a^2 - t^2}$ 이 된다

$\frac{1}{a^3}\int_0^a f(t)\,dt = \frac{1}{a^3}\int_0^a \frac{3a^4}{4a^2-t^2}dt$.

$= 3a\int_0^a \frac{1}{4a(2a-t)} + \frac{1}{4a(2a+t)}\,dt$.

$= \frac{3}{4}\left[-\ln 2a-t + \ln 2a+t\right]_0^a$

$= \frac{3}{4}\ln 3$.

$\boxed{\frac{3}{4}\ln 3}$

2.(3) 위에서 알수 있듯이 $P(t, s)$ 라 할때

$l: y = \frac{-tb^2}{sa^2}x + \frac{t^2b^2}{sa^2} + s$.

$tb^2x + sa^2y = t^2b^2 + s^2a^2$.

$f(t) = \left(\frac{t^2b^2+s^2a^2}{\sqrt{t^2b^4+s^2a^4}}\right)^2 = \frac{a^4b^4}{t^2b^4+s^2a^4}$ 이 된다.

$h(t) = \overline{PF_1} \times \overline{PF_2}$

$= \sqrt{(t-\sqrt{a^2-b^2})^2+s^2} \times \sqrt{(t+\sqrt{a^2-b^2})^2+s^2}$ ($\because F_1(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ $F_2(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ 이므로)

$= \sqrt{(t^2+(a^2-b^2)+s^2)^2 - 4t^2(a^2-b^2)}$. ($s^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}t^2$ 이므로)

$= \sqrt{\left(-t^2 + \frac{b^2}{a^2}t^2 + a^2\right)^2}$

$= \frac{1}{a^2}(a^4 - t^2(a^2-b^2))$ 이 된다.

$f(t) \times h(t) = \frac{a^4b^4}{t^2b^4+s^2a^4} \times \frac{1}{a^2}(a^4 - t^2(a^2-b^2))$

$s^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}t^2$

$= \frac{a^4b^4}{b^2(a^4 - \cancel{t^2(a^2-b^2)})} \times \frac{1}{a^2}(a^4 - \cancel{t^2(a^2-b^2)})$

$= a^2b^2$

$\boxed{a^2b^2}$