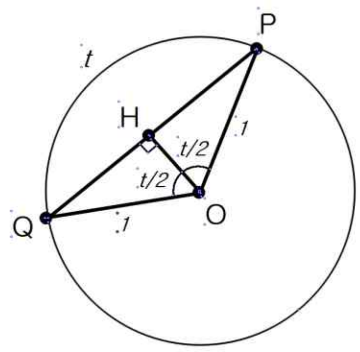
자 연 계	한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시 **논 술 예 시 답 안**	오후(1)-1번

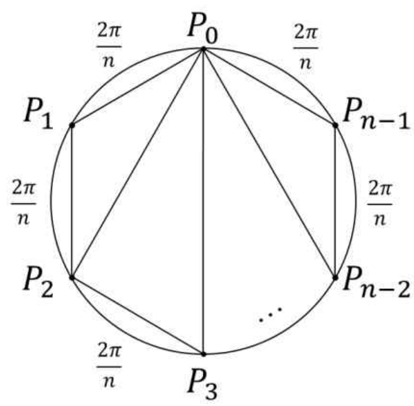
1. 오른쪽 그림에서 원의 중심 O 에서 현 PQ 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.



$f(t) = 2\overline{\mathrm{QH}} = 2\sin\frac{t}{2}$, $g(t) = \frac{1}{2}\times 1^2 \times t - \frac{1}{2}\times 1^2 \times \sin t = \frac{1}{2}(t - \sin t)$ 이므로

$$\lim_{t\to 0+}\frac{g(t)}{f(t)} = \lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{2}(t-\sin t)}{2\sin\frac{t}{2}} = \lim_{t\to 0+}\frac{1}{2}\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right) = \frac{1}{2}\times 1\times(1-1) = 0$$

2. 1 번에서 구한 $f(t)$에 대하여,



$\overline{P_0P_1} = f\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, $\overline{P_0P_2} = f\left(\frac{2\pi}{n}\cdot 2\right)$, $\cdots$, $\overline{P_0P_{n-1}} = f\left(\frac{2\pi}{n}\cdot(n-1)\right)$이고,

$f\left(\frac{2\pi}{n}\cdot n\right) = f(2\pi) = 0$ 이므로,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{P_0P_1}+\cdots+\overline{P_0P_{n-1}}}{n}$$

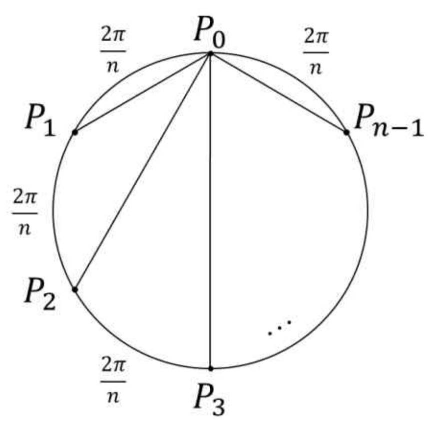
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\frac{1}{n} + f\left(\frac{2\pi}{n}\cdot n\right)\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(0+\frac{2\pi-0}{n}\cdot k\right)\frac{2\pi-0}{n}\cdot\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$$

이고, $f(t) = 2\sin\frac{t}{2}$ 이므로, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{4}{\pi}$.

3. 1 번에서 구한 $g(t)$에 대하여,

$S_1 = g\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, $S_2 = g\left(\frac{2\pi}{n}\cdot 2\right)$, $\cdots$, $S_{n-1} = g\left(\frac{2\pi}{n}\cdot(n-1)\right)$ 이고, $g\left(\frac{2\pi}{n}\cdot n\right) = g(2\pi) = \pi$ 이므로,



$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1^2+\cdots+S_{n-1}^2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(g\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\right)^2\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(g\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\right)^2\frac{1}{n} - \left(g\left(\frac{2\pi}{n}\cdot n\right)\right)^2\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(g\left(0+\frac{2\pi-0}{n}\cdot k\right)\right)^2\frac{2\pi-0}{n}\cdot\frac{1}{2\pi}\right) - \lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{n}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(g(t))^2 dt - 0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}(t-\sin t)\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}(t^2 - 2t\sin t + \sin^2 t)dt \text{ 이다.}$$

부분적분에 의해 $\int t\sin t\,dt = -t\cos t + \sin t + C_1$, $\int \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}(t - \cos t\sin t) + C_2$ 를 구하고, 따라서

$$\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}(t^2 - 2t\sin t + \sin^2 t)dt = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{1}{3}t^3 - 2(-t\cos t + \sin t) + \frac{1}{2}(t - \cos t\sin t)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{8}{3}\pi^3 + 5\pi\right) = \frac{\pi^2}{3} + \frac{5}{8}.$$

한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시

자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(1)-2번

1. 확률변수 X를 진행한 시합 횟수라고 하자. 우승팀이 결정될 경우의 수는 팀 A의 결과가 승승승, 패패패 (시합 3회), 패승승승, 승패승승, 승승패승, 승패패패 패승패패, 패패승패 (시합 4회), 승패패승승, 승패승패승, 승승패패승, 패승패승승, 패승승패승, 패패승승승, 승승패패패, 승패승패패, 승패패승패, 패승승패패, 패승패승패, 패패승승패 (시합 5회) 총 20가지이다. 따라서 기댓값은 다음과 같다.

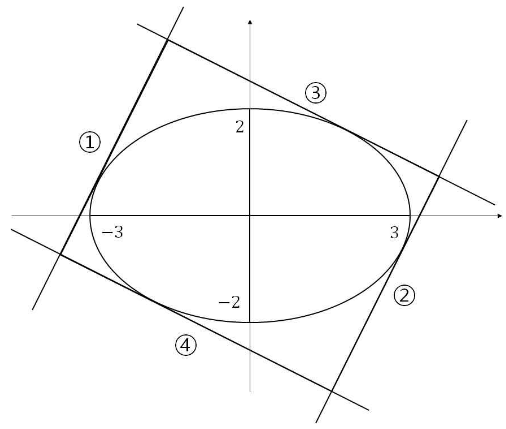
$$E(X) = 3[p^3 + (1-p)^3] + 4[3p^3(1-p) + 3p(1-p)^3] + 5[6p^3(1-p)^2 + 6p^2(1-p)^3]$$

이 기댓값을 p의 함수는 $6p^4 - 12p^3 + 3p^2 + 3p + 3$이다.

2. 타원을 좌표평면에 두어 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ 이라 하자.

직사각형의 한 변을 포함하는 접선의 기울기를 m이라 하자.

먼저 $m=0$ 이면, 직사각형의 변의 길이는 6 또는 4이고 $2\sqrt{5}$가 아니므로 $m \neq 0$ 임을 알 수 있다. 기울기 $m(\neq 0)$인 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{m}$ 이므로, 직사각형의 네 변은 각각 다음의 접선에 포함된다.



① $y = mx + \sqrt{9m^2+4}$

② $y = mx - \sqrt{9m^2+4}$

③ $y = -\dfrac{1}{m}x + \sqrt{\dfrac{9}{m^2}+4}$

④ $y = -\dfrac{1}{m}x - \sqrt{\dfrac{9}{m^2}+4}$

직선 ①과 ②사이의 거리를 a이라고 하고, 직선 ③과 ④사이의 거리를 b라고 하면,

$a = 2\sqrt{\dfrac{9m^2+4}{m^2+1}}$, $b = 2\sqrt{\dfrac{9+4m^2}{1+m^2}}$ 이고, a와 b 둘 중 하나가 $2\sqrt{5}$이다.

$a = 2\sqrt{5}$이면 $m = \pm\dfrac{1}{2}$이고 따라서 $b = 4\sqrt{2}$이다. $b = 2\sqrt{5}$이면 $m = \pm 2$이고 따라서 $a = 4\sqrt{2}$이다.

두 경우 모두 직사각형의 넓이는 $ab = 8\sqrt{10}$ 이다.

3. $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자. 구간 $[-a,a]$를 $[-a,0]$과 $[0,a]$로 나누어 각각 부분적분하면

$$\int_0^a (a-x)f'(x)dx = \Big[(a-x)f(x)\Big]_0^a + \int_0^a f(x)dx = F(a) - F(0) - af(0),$$

$$\int_{-a}^0 (a+x)f'(x)dx = \Big[(a+x)f(x)\Big]_{-a}^0 - \int_{-a}^0 f(x)dx = F(-a) - F(0) + af(0)$$

를 얻는다. 이를 합하면 $\displaystyle\int_{-a}^a (a-|x|)f'(x)dx = F(a) + F(-a) - 2F(0)$이 되고, 따라서 주어진 조건에 의해 모든 $x \geq 0$에 대해 $F(x) = -F(-x) + 2F(0)$임을 알 수 있다. 여기서 양변을 x에 대해 미분하면 $f(x) = f(-x)$가 모든 $x > 0$에 대해 성립한다. $x = 0$인 경우에는 당연히 $f(x) = f(-x)$이고, $x < 0$인 경우에도 대칭성에 의해 $f(x) = f(-(-x)) = f(-x)$임을 알 수 있다. 따라서 모든 x에 대해 $f(x) = f(-x)$가 성립한다.

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

307402

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:030401)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 '0'점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

[1-1] 원의 중심을 O 라고 할 때, 호의 길이가 t인 부채꼴 POQ의 중심각을 θ 라고 할 때,

$1\times\theta = t$ 이므로 $\theta = t$ 이다.

$\therefore f(t) = 2\sin\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{t}{2}$

$g(t) = \frac{1}{2}\times1^2\times\theta - 1\times1\times\sin\theta\times\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}(\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}(t-\sin t)$

$\lim_{t\to0+}\frac{g(t)}{f(t)} = \lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{2}(t-\sin t)}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{4}\times\left(\lim_{t\to0+}\frac{t}{\sin\frac{t}{2}} - \lim_{t\to0+}\frac{\sin t}{\sin\frac{t}{2}}\right)$

$= \frac{1}{4}(2-2) = 0$

[1-2] 원의 중심을 O 라고 할 때, 호의 길이가 더 작은 부채꼴 P_kOP_{k+1} $(k=0,1,\cdots,n)$의 중심각의 크기는 $\frac{2\pi}{n}$이다.

따라서, 부채꼴 P_0OP_l $(l=1,2,\cdots,n-1)$의 중심각의 크기는 $\frac{2l\pi}{n}$ 이고

$\overline{P_0P_l}$ 은 부채꼴 P_0OP_l의 현이라고 볼 수 있으므로

$\overline{P_0P_l} = 2\sin\frac{\frac{2l\pi}{n}}{2} = 2\sin\frac{l\pi}{n}$ 이다.

$\frac{\overline{P_0P_1}+\overline{P_0P_2}+\cdots+\overline{P_0P_{n-1}}}{n} = \sum_{l=1}^{n-1}\frac{2}{n}\sin\frac{l\pi}{n}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{2}{n}\sin\frac{l\pi}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{2}{n}\sin\frac{l\pi}{n} - \frac{2}{n}\sin\frac{n\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n}\frac{2}{n}\sin\frac{l\pi}{n}$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(1-(-1))$

$= \frac{4}{\pi}$

[1-3]

$S_1 = \frac{1}{2}\times1^2\times\frac{2\pi}{n} - 1\times1\times\sin\frac{2\pi}{n}\times\frac{1}{2}$

$S_2 = \frac{1}{2}\times1^2\times\frac{4\pi}{n} - 1\times1\times\sin\frac{4\pi}{n}\times\frac{1}{2}$

$\vdots$

$S_k = \frac{1}{2}\times1^2\times\frac{2k\pi}{n} - 1\times1\times\sin\frac{2k\pi}{n}\times\frac{1}{2} = \frac{k\pi}{n} - \frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{n}$

$\frac{S_1^2+S_2^2+\cdots+S_{n-1}^2}{n} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2 - \frac{1}{n}\left(\frac{n\pi}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2n\pi}{n}\right)^2\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2 - \frac{\pi^2}{n}\right)$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x-\frac{1}{2}\sin2x\right)^2dx$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x^2 - x\sin2x + \frac{1}{4}\sin^22x\right)dx$

$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}x^2dx - \int_0^{\pi}x\sin2x\,dx + \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin^22x\,dx\right)$

$\int_0^{\pi}x\sin2x\,dx$ 에서,

$\int_0^{\pi}x\sin2x = \left[-\frac{1}{2}x\cos2x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{2}\cos2x\right)dx$

$= \left(-\frac{\pi}{2}-0\right) - \left[-\frac{1}{4}\sin2x\right]_0^{\pi}$

$= -\frac{\pi}{2}$

$\int_0^{\pi}\sin^22x\,dx$ 에서,

$\int_0^{\pi}\sin^22x\,dx = \int_0^{\pi}(1-\cos^22x)\,dx$ $\quad\cos^22x = \frac{1+\cos4x}{2}$ 이므로,

$\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1+\cos4x}{2}\right)dx = \int_0^{\pi}\frac{1-\cos4x}{2}dx$

$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin4x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}x^2dx - \int_0^{\pi}x\sin2x\,dx + \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin^22x\,dx\right)$

$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}+\frac{5}{8}\pi\right) = \frac{\pi^2}{3}+\frac{5}{8}$

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드
310348

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:030401)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 '0'점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

제시문을 이용하면 호 PQ의 중심각이 t 이다.
원의 중심에서 현 PQ로 수선의 발을 내리면
이등변 삼각형이 만들어 지고 이등변 삼각형
성질을 이용하면 $f(t)=2\sin(\frac{1}{2}t)$ 이고
부채꼴의 넓이에서 중심에서 점 P, Q로
각각 내린 선분과 $\overline{PQ}$ 에 의해 둘러싸인
넓이를 빼면 $g(t)=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\sin t$ 이다.

1) $\lim_{t\to 0+}\frac{g(t)}{f(t)}=\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\sin t}{2\sin\frac{1}{2}t}$ 는

$=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\times\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)$ 이다.

$\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}=0$ 으로 수렴하고, $\lim_{t\to 0+}1-\frac{\sin t}{t}=0$

으로 수렴한다.

따라서 $\frac{1}{2}\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\times\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)=0$ 이다

2) $\overline{P_0P_1}=\overline{P_1P_2}=\cdots=\overline{P_{n-1}P_n}$ 이므로 중심각의 크기는

$\frac{2\pi}{n}$ 으로 같다. 따라서 각 현의 중심각은

현 $P_0P_k=\frac{2k}{n}\pi$ 이다

$f(t)$를 구하는 방식으로 현 P_0P_k를 구하면

현 $P_0P_k=2\sin\frac{k}{n}\pi$ 이다. $\overline{P_0P_n}=\overline{P_0P_0}=0$ 이라고 하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{P_0P_1}+\overline{P_0P_2}+\cdots+\overline{P_0P_{n-1}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{P_0P_1}+\overline{P_0P_2}+\cdots+\overline{P_0P_n}}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\overline{P_0P_k}\times\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{k}{n}\pi\right)\times\frac{1}{n}$ 이다.

$=2\int_0^1\sin(\pi x)dx=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1=\frac{4}{\pi}$ 이다.

3) $\overline{P_0P_k}=f(\frac{2\pi}{n}k)$ 이고 $S_k=g(\frac{2\pi}{n}k)$ 이다

$S_k=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{n}k-\sin\frac{2\pi}{n}k\right)$

$S_k^2=\frac{1}{4}\left(\left(\frac{2\pi}{n}k\right)^2-2\left(\frac{2\pi}{n}k\cdot\sin(\frac{2\pi}{n}k)\right)+\left(\sin\frac{2\pi}{n}k\right)^2\right)$

$S_n=\pi$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1^2+S_2^2+\cdots+S_{n-1}^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_1^2+S_2^2+\cdots+S_n^2-\pi^2}{n}$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1^2+S_2^2+S_3^2\cdots S_n^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4n}\left(\left(\frac{2\pi}{n}k\right)^2-2\left(\frac{2\pi}{n}k\cdot\sin(\frac{2\pi}{n}k)\right)+\left(\sin\frac{2\pi}{n}k\right)^2\right)$

$=\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}x^2-2x\sin x+\sin^2x\,dx=\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}x^2-2x\sin x+\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}dx$

$=\frac{1}{8\pi}\left\{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{2\pi}+\left[2x\cos x\right]_0^{2\pi}-\left[2\sin x\right]_0^{2\pi}+\left[\frac{1}{2}x\right]_0^{2\pi}-\left[\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{2\pi}\right.$

$=\frac{1}{3}\pi^2+\frac{5}{8}$ 이다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨