한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	오후(1)-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 오후(1)의 [문제 1]은 고교수학과정 중 “미적분-미분법-여러 가지 함수의 미분” 단원의 삼각함수의 극한과 “미적분-적분법-정적분의 활용” 단원의 정적분과 급수의 합 사이의 관계, “미적분-적분법-여러 가지 적분법” 단원의 치환적분법, 부분적분법을 주요 내용으로 하고 있다. 도형의 성질을 잘 이해하고 활용하기 위한 중요한 도구인 삼각함수와 미적분의 관련 지식을 적절히 활용해서 주요 평면도형인 원이 갖고 있는 중요한 성질들을 분석하고, 정확한 논증을 통해 원하는 결과를 도출할 수 있는지를 묻고 있다. 다음 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

문항 1. 원의 호와 현에 대한 정보를 분석하고, 삼각함수의 극한을 구하는 도구를 적절히 활용하기.

문항 2. 원의 성질에 대한 이해를 바탕으로 주어진 무한급수를 적당한 정적분으로 변환하고, 치환적분법 등의 기술을 적절히 활용하여 정적분의 값을 구하기.

문항 3. 주어진 무한급수를 적당한 정적분으로 변환하고, 부분적분법 등의 기술을 적절히 활용하여 정적분의 값을 구하기.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	현 PQ의 길이 $f(t)$와 현 PQ와 호 PQ로 둘러싸인 도형의 넓이 $g(t)$를 구했는가?	20
		삼각함수의 극한에 대한 성질을 활용해서 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{g(t)}{f(t)}$ 를 구했는가?	10
2	30	무한급수 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{P_0P_1}}+\overline{\mathrm{P_0P_2}}+\cdots+\overline{\mathrm{P_0P_{n-1}}}}{n}$ 를 적당한 정적분의 식으로 변환하였는가?	20
		정적분의 값을 구했는가?	10
3	40	무한급수 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_1^2+S_2^2+\cdots+S_{n-1}^2}{n}$ 를 적당한 정적분의 식으로 변환하였는가?	20
		정적분의 값을 구했는가?	20

3. 출제 근거

이 문제는 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 교과서 미적분의 주요내용을 다루고 있다. 3개의 소문항은 교과서의 내용과 다음과 같이 연계되며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용만으로 구성되어 있다.

교과서 수학I (천재교육 이준열 외 9인) - 삼각함수 - 사인법칙과 코사인법칙

교과서 미적분 (미래엔 황선욱 외 8인) - 미분법 - 여러 가지 함수의 미분 - 삼각함수의 극한

교과서 미적분 (미래엔 황선욱 외 8인) - 적분법 - 정적분의 활용 - 정적분과 급수의 합 사이의 관계

교과서 미적분 (좋은책신사고 고성은 외 5인) - 적분법 - 여러 가지 적분법 - 치환적분법

교과서 미적분 (좋은책신사고 고성은 외 5인) - 적분법 - 여러 가지 적분법 - 부분적분법

한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	출제 의도 및 평가 지침	오후(1)-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 오후(1) [문제 2]는 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용을 바탕으로 출제되었다. 아래 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

문항1. 주어진 상황을 통하여 사건에 해당하는 경우와 대응되는 확률을 파악하고 기댓값을 주어진 확률에 대한 식으로 나타낼 수 있는지 묻고 있다. 확률과 통계에서 등장하는 기본적인 개념에 대한 이해도를 묻는 문제이다.

문항2. 이차곡선에 대한 기본적인 지식을 바탕으로, 주어진 도형을 좌표평면으로 적절히 옮겨 방정식으로 변환하고 효과적으로 분석할 수 있는가를 묻고 있다. “기하-이차곡선-타원과 직선” 단원의 타원의 접선의 방정식에 대한 지식과 성질을 적절히 활용하여, 필요한 결과를 도출할 수 있는지를 평가한다.

문항3. 구간을 나누어 적분하는 방법과 부분적분법을 이용하여 함수의 성질을 분석할 수 있는가를 묻고 있다. 간단한 합성함수 미분을 통해 필요한 결과를 도출할 수 있는지 또한 평가한다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	우승팀이 결정될 경우의 수와 확률을 제대로 파악했는가?	15
		기댓값의 정의에 따라 이를 p에 대한 식으로 표현했는가?	15
2	30	타원을 좌표평면에 두어 직사각형의 각 변을 포함하는 접선의 방정식을 구했는가?	15
		직사각형의 각 변의 길이를 평행한 두 직선사이의 거리로 해석하고 직사각형의 넓이를 구했는가?	15
3	40	구간별 부분적분을 통해 $F(x)+F(-x)=2F(0)$임을 밝혀냈는가?	20
		F에 관한 식을 미분해서 필요한 결론을 도출했는가?	20

3. 출제 근거

문항1. **교과서 확률과 통계, (**Mirae N 황선욱 외 8인) - **II 확률 – 1. 확률의 뜻과 활용**

교과서 확률과 통계, (Mirae N 황선욱 외 8인) - **III 통계 – 1. 확률분포 – 이산확률변수의 기댓값**

문항2. 교과서 기하 (미래엔 황선욱 외 8인) - 이차곡선 **-** 타원 **-** 타원과 직선

문항3. 교과서 수학 II (미래엔 황선욱 외 8인) - 다항함수의 적분법 **-** 부정적분과 정적분 **-** 정적분

교과서 미적분 (미래엔 황선욱 외 8인) - 미분법 **-** 여러 가지 미분법 **-** 합성함수의 미분법

교과서 미적분 (미래엔 황선욱 외 8인) - 적분법 **-** 여러 가지 적분법 **-** 부분적분법

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 실시한 시합 수 : 3

A 승 승 승 or A 패 패 패
B 패 패 패 B 승 승 승

$\downarrow$ $\downarrow$

p^3 국가기 $(1-p)^3$

시합 B가 승리할 확률 $1-p$

실시한 시합 : 4

A 승×3 패×1 $\rightarrow p^3 \times (1-p)$ $\rightarrow$ A가 우승팀
B

A가 마지막에 승리해야 하므로 경우의수 $\boxed{{}_3C_1}$

A
B 승×3 패×1 $\rightarrow p \times (1-p)^3$ $\rightarrow$ B가 우승팀

경우의수 $\boxed{{}_3C_1}$

시합 : 5

시합 : 5회

A 승×3 패×2 $\rightarrow p^3 \times (1-p)^2$ $\rightarrow$ A 우승팀

경우의수 ${}_4C_2$

B 승×3 패×2 $\rightarrow p^2 \times (1-p)^3$ $\rightarrow$ B 우승

경우 ${}_4C_2$

기댓값 : $3 \times p^3 \times 1 + 3(1-p)^3 + 4 \times 3\, p^3(1-p) + 4 \times 3\,(1-p)^3 p + \overset{\times 5}{6p^3(1-p)^2} + \overset{\times 5}{6p^2(1-p)^3}$

$= p^3(3 + 12 - 12p + 30(1-p)^2) + (1-p)^3(3 + 12p + 30p^2)$

$= p^3(30p^2 - 72p + 45) + (1-p)^3(30p^2 + 12p + 3)$

$= 6p^4 - 12p^3 + 3p^2 + 3p + 3$

2. 접선 中 기울기가 m인 직선 2개와 $-\frac{1}{m}$인 직선 2개가 만나면 직사각형을 이룬다.

그 한 변의 길이가 $2\sqrt{5}$라는건 평행한 두 직선 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$라는 것

+

두 직선이 서로 원점 대칭이므로 원점과 떨어진 거리 $\sqrt{5}$

타원의 중심이 $(0,0)$이면

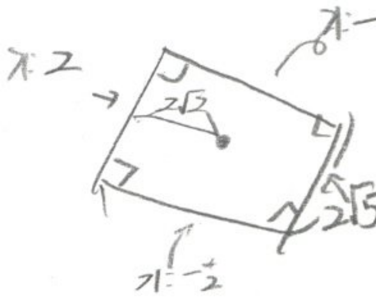
$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 이 타원의 방정식이다.

$y = mx \pm \sqrt{9m^2+4}$

$\frac{\sqrt{9m^2+4}}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$

$9m^2+4 = 5m^2+5$ $m = \pm\frac{1}{2}$ 인데 -2 놓자.

$4m^2 = 1$



부호는 바뀌고 직사각형이 대칭이동할 뿐이라 주어진 조건과 넓이를 바꾸지 않음

$m = 2$이면

$y = 2x \pm \sqrt{4 \times 10}$

$\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{2}$

$\hookrightarrow$ 원점과 떨어진 거리

넓이: $4\sqrt{2} \times 2\sqrt{5} = \boxed{8\sqrt{10}}$

3. 주어진 식을 $x \geq 0$과 $x < 0$으로 나누면

$\int_0^a (a-x) f(x)\,dx + \int_{-a}^0 (a+x) f(x)\,dx = 0$ 이다.

$a\int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a x f(x)\,dx + a\int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_{-a}^0 x f(x)\,dx = 0$

$a\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a x f(x)\,dx - \int_{-a}^0 x f(x)\,dx$

$a(f(a) - f(-a)) = [x f(x)]_0^a - \int_0^a f(x)\,dx - [x f(x)]_{-a}^0 + \int_{-a}^0 f(x)\,dx$

$a\cancel{f(a)} - a\cancel{f(-a)} = a\cancel{f(a)} - a\cancel{f(-a)} - \int_0^a f(x)\,dx + \int_{-a}^0 f(x)\,dx$

$\rightarrow \int_0^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx$ $F(a) - F(0) = F(0) - F(-a)$ $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

$\hookrightarrow$ a에 대하여 미분 $f(a) = f(-a)$ 이다.

식에 $-a$를 대입하면 음수범위 내에서도 성립.

0을 대입하면, $f(0) = f(0)$ 이므로 성립

따라서 $f(x) = f(-x)$는 모든실수 x에 대하여 성립한다.

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. B가 승리할 확률 : $1-p$

무승부가 없으므로 게임이 5회 초과로 진행될 수 없다

(6회 이상 진행되면 비둘기집 원리에 의해 두팀 모두 3승을 하거나 한 팀이 4승 이상을 한다)

게임이 3회 미만으로 진행 되면 우승자가 결정되지 않으므로 실시한 시합 횟수는 3, 4, 5 번이 가능하다.

i) 3회만에 우승자가 나온 경우 $(A, B) = (0,3)$ or $(3,0)$

A 또는 B가 3회 모두 승리

$\therefore$ 확률 $= p^3 + (1-p)^3 = 1-3p+3p^2$

ii) 4회만에 우승자가 나온 경우 $(A, B) = (1,3)$ or $(3,1)$

① A가 우승

4회 중 마지막은 A가 승. $\Rightarrow$ ${}_3C_1 \cdot p^2(1-p) \cdot p$
$= 3p^3(1-p)$

② B가 우승

4회 중 마지막은 B가 승 $\Rightarrow$ ${}_3C_1 \cdot p(1-p)^2 \cdot (1-p)$
$= 3p(1-p)^3$

$\therefore$ 확률 $= 3p^3(1-p) + 3p(1-p)^3 = 3p(1-p)(2p^2-2p+1)$

iii) 5회만에 우승자가 나온 경우 $(A, B) = (2,3)$ or $(3,2)$

① A 우승

5회 중 마지막은 A가 승 $\Rightarrow$ ${}_4C_2 \cdot p^2(1-p)^2 \cdot p = 6p^3(1-p)^2$

② B가 우승.

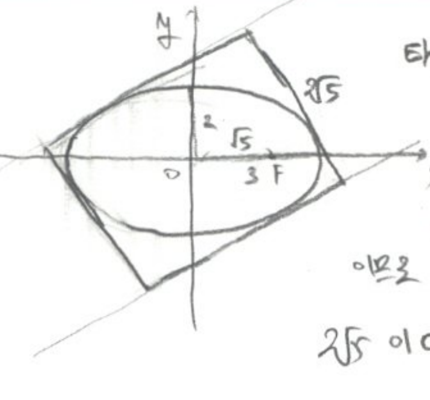
5회 중 마지막은 B가 승 $\Rightarrow$ ${}_4C_2 \cdot p^2(1-p)^2 \cdot (1-p) = 6p^2(1-p)^3$

$\therefore$ 확률 $= 6p^3(1-p)^2 + 6p^2(1-p)^3 = 6p^2(1-p)^2$

$\therefore$ 기댓값 $= 3 \cdot (1-3p+3p^2) + 4 \cdot 3p(1-p)(2p^2-2p+1) + 5 \cdot 6p^2(1-p)^2$
$= 3(2p^4 - 4p^3 + p^2 + p + 1)$

$\boxed{\text{답: } 6p^4-12p^3+3p^2+3p+3}$

2.



타원의 방정식을 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 이라 하자.

네변이 모두 이 타원에 접하는 직사각형의 한 변의 길이가 $2\sqrt{5}$ 이므로 기울기가 같은 두 접선 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$ 이다.

기울기가 m인 접선의 방정식은 $y = mx \pm \sqrt{9m^2+4}$ 이므로

두 접선 사이 거리는 $2\sqrt{9m^2+4} \cdot \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} = 2\frac{\sqrt{9m^2+4}}{\sqrt{m^2+1}} = 2\sqrt{5}$ 이다.

($\because$ m이 기울기 $\Rightarrow$ $2\sqrt{9m^2+4}$는 y좌표 차이 이므로 $\times \cos\theta$ 를 해줘야 하는데 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$)

$\frac{\sqrt{9m^2+4}}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$ 이므로 $9m^2+4 = 5m^2+5$

$m = \pm\frac{1}{2}$ 이다. ($+\frac{1}{2}$이든 $-\frac{1}{2}$이든 직사각형 넓이는 동일)

$m = -\frac{1}{2}$이라 하고 다른 두 접선을 구하면

$y = 2x \pm \sqrt{40} = 2x \pm 2\sqrt{10}$ 이므로 (접선의 기울기 $= -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$)

두 접선 사이 거리는 $2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{2}$ 이다.

$\therefore$ $2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{10}$ $\boxed{\text{답: } 8\sqrt{10}}$

3. $\int_{-a}^{a}(a-|x|)f'(x)dx = \int_{-a}^{a} af'(x)dx - \int_{-a}^{a}|x|f'(x)dx$

$= a(f(a)-f(-a)) - \int_0^a xf'(x)dx + \int_{-a}^0 xf'(x)dx$

$= a(f(a)-f(-a)) - af(a) + \int_0^a f(x)dx - (-a)f(-a) + \int_{-a}^0 f(x)dx$

$= \int_0^a f(x)dx - \int_{-a}^0 f(x)dx = 0$

$\therefore$ $\int_0^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx$ 이를 a에 대해 미분하면

$f(a) = -(-f(-a)) = f(-a)$ $\Rightarrow$ a가 양수이므로

$x>0$ 에서 $f(x) = f(-x)$

$x<0$ 에서 $x=-a$ $f(-a) = f(a)$ 성립 $\Rightarrow$ $f(x) = f(-x)$

$x=0$에서 $f(0) = f(0)$ 성립; $\therefore$ $f(x) = f(-x)$