한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

의예과-2번

1. 먼저 $p(0)=1$임과 $x>-\dfrac{1}{n}$의 범위에서 $p(x)$가 양수임은 쉽게 알 수 있다. 이제 $x=0$을 포함하는 $x>-\dfrac{1}{n}$의 범위로 $p(x)$의 정의역을 제한하면 아무 문제없이 $\ln p(x)$를 생각할 수 있고,

$\ln p(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(1+kx)$를 얻는다. 양변을 미분하면

$$\frac{p'(x)}{p(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{1+kx}$$

이므로 $p'(0)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$를 얻는다.

다시 한 번 위 식에서 양변을 미분하면

$$\frac{p''(x)}{p(x)}-\frac{\{p'(x)\}^2}{\{p(x)\}^2}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(1+kx)^2}$$

이므로 $p''(0)=\{p'(0)\}^2-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$을 얻는다.

따라서

$$\begin{aligned} p''(0) &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{12} \end{aligned}$$

답: $\dfrac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{12}$

2. $q(x)=e^x+x\ln(x+1)+x^2\cos^{2022}\pi x$라 하면, 함수 $q(x)$는 닫힌구간 $[0,1]$을 포함하는 열린구간에서 연속인 도함수 $q'(x)$를 갖는다. 제시문 <가>에 의하여 $q'(x)$는 닫힌구간 $[0,1]$에서 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 하면 닫힌구간 $[0,1]$에서

$m\le q'(x)\le M$ ...... ㉠

한편 부분적분법을 적용하면

$$\begin{aligned} c_n &= (n-2022)\int_0^1 x^n q(x)\,dx \\ &= \frac{n-2022}{n+1}\left(\left[x^{n+1}q(x)\right]_0^1-\int_0^1 x^{n+1}q'(x)dx\right) \\ &= \frac{n-2022}{n+1}\left(q(1)-\int_0^1 x^{n+1}q'(x)dx\right) \end{aligned}$$

㉠과 제시문 <나>에 의하여

$$\frac{m}{n+2}=m\int_0^1 x^{n+1}dx\le\int_0^1 x^{n+1}q'(x)dx\le M\int_0^1 x^{n+1}dx=\frac{M}{n+2}$$

따라서

$$\frac{(n-2022)m}{(n+1)(n+2)}\le\frac{n-2022}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}q'(x)dx\le\frac{(n-2022)M}{(n+1)(n+2)}$$

이고 제시문 <다>에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-2022}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}q'(x)dx=0$$

그러므로

$$\lim_{n\to\infty}c_n=q(1)=e+\ln 2+\cos^{2022}\pi=e+\ln 2+1$$

답: $e+\ln 2+1$

3. 원 C의 방정식

$$\left(x-\frac{k^2}{4}\right)^2+(y-k)^2=\left(\frac{k^2}{4}+1\right)^2$$

에 $x=\dfrac{y^2}{4}$를 대입하여 정리하면

$$y^4+2(8-k^2)y^2-32ky+8(k^2-2)=0$$

$$r(y)=y^4+2(8-k^2)y^2-32ky+8(k^2-2)$$

이라고 하자. 함수 $r(y)$의 도함수를 구하면

$r'(y)=4y^3+4(8-k^2)y-32k=4(y-k)(y^2+ky+8)$ .... ㉡

k의 값에 따른 방정식 $r(y)=0$의 서로 다른 근의 개수는 다음과 같다.

경우 1) $0\le k<4\sqrt{2}$

열린구간 $(-\infty,\infty)$에서 $y^2+ky+8>0$이다. 따라서 함수 $r(y)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

y	$\cdots$	k	$\cdots$
$r'(y)$	$-$	0	$+$
$r(y)$	↘	$-(k^2+4)^2<0$	↗

$r(y)=0$은 서로 다른 두 근을 갖는다.

경우 2) $k=4\sqrt{2}$

$r'(y)=4(y-4\sqrt{2})(y+2\sqrt{2})^2$이므로 함수 $r(y)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

y	$\cdots$	$-\frac{k}{2}=-2\sqrt{2}$	$\cdots$	$k=4\sqrt{2}$	$\cdots$
$r'(y)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$r(y)$	↘	$r\left(-\frac{k}{2}\right)>r(0)=240$	↘	$-1296<0$	↗

$r(y)=0$은 서로 다른 두 근을 갖는다.

경우 3) $k>4\sqrt{2}$

㉡으로부터

$r'(y)=0$이면 $y=k,\ \dfrac{1}{2}\left(-k\pm\sqrt{k^2-32}\right)$

$c=\dfrac{1}{2}\left(-k-\sqrt{k^2-32}\right)$, $d=\dfrac{1}{2}\left(-k+\sqrt{k^2-32}\right)<0$이라 하고, 함수 $r(y)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

y	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	k	$\cdots$
$r'(y)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$r(y)$	↘	$r(c)$	↗	$r(d)>r(0)$ $=8(k^2-2)>0$	↘	$-(k^2+4)^2<0$	↗

또한 ㉡으로부터

$c^3=8k-(8-k^2)c,\ c^2+kc+8=0$

따라서 제시문 <라>를 이용하면

$$\begin{aligned} r(c) &= 8kc-(8-k^2)(kc+8)-32kc+8(k^2-2) \\ &= k(k^2-32)c+16(k^2-5)=-2h\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

한편, $r(c)>0$이면, 즉, $h\left(\dfrac{k}{\sqrt{2}}\right)<0$이면, 방정식 $r(y)=0$은 서로 다른 두 개의 근을 갖고, $r(c)<0$이면, 즉 $h\left(\dfrac{k}{\sqrt{2}}\right)>0$이면, 방정식 $r(y)=0$은 서로 다른 네 개의 근을 갖는다.

제시문 <라>에 의하여 $k<5\sqrt{2}$이면 $r(y)=0$은 서로 다른 두 개의 근을 갖고, $k>5\sqrt{2}$이면 $r(y)=0$은 서로 다른 네 개의 근을 갖는다.

원 C와 포물선 $y^2=4x$의 서로 다른 교점의 개수는 방정식 $r(y)=0$의 서로 다른 근의 개수와 같으므로, 구하는 양수 k_0는 $5\sqrt{2}$이다.

답: $5\sqrt{2}$

한양대학교

답안지 (의예과)

답안지 바코드

400396

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:030401)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

(가)에서 예시된 생식보조시술의 상황에서는 비동일성 문제가 발생한다. 서로 다른 부부에게서 자는 아이가 태어나기 때문에 누구에게 최선의 이익인지 확정할 수 없다. (가)에 의하면 곤윤이의 주장은 타당하다. 비동일성 문제가 발생한 상황일 때 의사가 최선의 이익을 근거로 환자의 요구를 거부할 수 없기 때문이다. 비동일성 문제가 발생했을 때 의사는 사회의 행복을 증가시키는지 여부만을 고려하여 환자에게 조언을 할 수밖에 없다. 그러나 환자에게는 사회 전체의 행복보다는 개인의 자율적인 선택이 더 중요하므로 의사는 환자의 요구사항을 반영할 의무가 있다.

(나)에서 듣지 못하는 선천적인 장애를 지닌 부부가 듣지 못하는 아이와 들을 수 있는 아이를 낳을지 선택하는 상황이다. (나)에서 의사는 부부에게 선천적인 장애를 지닌 아이가 겪게 될 불편함을 이야기하여 조언을 줄 수는 있지만 결과적인 판단은 부부에게 맡겨야 한다. (나)의 상황은 비동일성 문제를 갖고 있다. 부부가 어떤 배아를 선택하는지에 따라 다른 아이가 태어나므로 어떤 선택이 최선의 이익을 주는지 확정할 수 없다. 귀가 들리는 아이가 태어나는 것이 사회 전체로 보았을 때 이득일 수는 있지만 이 것이 부부의 자율적인 선택보다 더 중요한 가치일 수는 없다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

이 줄 위에 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 라고 나타낼 수 있다.

$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2 a_2 x + a_1$

$P''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + \cdots + 6 a_3 x + 2 a_2$

$\therefore P''(0) = 2a_2$.

$P(x) = \underset{①}{(1+x)} \underset{②}{(1+2x)} \cdots \underset{ⓝ}{(1+nx)}$ 이므로,

$a_2 x^2$는 ①~ⓝ에서 1을 $n-2$번 선택, x를 2번 택해 곱들의 합이다.

$$\therefore a_2 = \frac{(1+2+\cdots+n)^2 - (1^2+2^2+\cdots+n^2)}{2} = \frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}$$

$$\therefore \boxed{P''(0) = 2a_2 = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{12}}$$ 이다.

2.

$f(x) = e^x + x\ln(x+1) + x^2\cos^{2022}\pi x$ 이라고 두자. $f(1) = e+\ln 2+1$

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n+1}x^{n+1}f'(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{n+1}(e+\ln 2+1) - \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{n+1}x^{n+1}f'(x)\,dx}_{A}$$

어떤 큰 상수 k에 대해 $0<x<1$ 에서

$-k < f'(x) = e^x + \ln(x+1) + 2x\cos^{2022}\pi x - 2022\pi x^2\cos^{2021}\pi x\sin\pi x < k$ 이다.

$$\therefore -\frac{k}{(n+1)(n+2)} < A < \int_0^1 \frac{1}{n+1}x^{n+1}k\,dx = \frac{k}{(n+1)(n+2)}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2022)k}{(n+1)(n+2)} = 0$ 이므로, 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{n\to\infty}(n+2022)A = 0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} C_n = \frac{n+2022}{n+1}(e+\ln 2+1) - (n+2022)A = \boxed{e+\ln 2+1}$$

3. 원 C: $\left(x-\frac{k^2}{4}\right)^2 + (y-k)^2 = \left(\frac{k^2}{4}+1\right)^2$

$k=k_0$일 때 원 C와 포물선이 접한다. $\left(\frac{a^2}{4}, a\right)$에서 접한다고 하자.

포물선: $2ay' = 4 \Rightarrow y' =$ 접선의 기울기 $= \frac{2}{a}$

원 C: $\left(\frac{a^2}{4}-\frac{k^2}{4}\right) + (a-k)y' = 0 \Rightarrow \underset{A\text{이므로 X.}}{k=a \text{ 또는 }} \underline{k = -a-\frac{8}{a}}$ $k>0$ 이므로, $a<0$

$$\left(\frac{a^2}{4}-\frac{k^2}{4}\right)^2 + (a-k)^2 = (a-k)^2\left(\left(\frac{a+k}{4}\right)^2+1\right) = (a-k)^2\left(\frac{4}{a^2}+1\right) = \left(2a+\frac{8}{a}\right)^2\left(\frac{4}{a^2}+1\right)$$

$$= \left(\frac{k^2}{4}+1\right)^2$$

$$\pm\left(\frac{k^2}{4}+1\right) = \left(2a+\frac{8}{a}\right)\frac{\sqrt{4+a^2}}{a} = \frac{(2a^2+8)\sqrt{4+a^2}}{a^2}$$

$$\pm\frac{1}{4a^2}(a^2+4)(a^2+16)$$

$\Leftrightarrow \pm\sqrt{a^2+4}\,(a^2+16) = (2a^2+8)4$

$a^2 = x$

$\Leftrightarrow \pm\sqrt{x+4}\,(x+16) = 8(x+4)$

$\Leftrightarrow x = 32$

$\therefore a = 4\sqrt{2}$, $k = k_0 = 4\sqrt{2}+\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨