한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

오전-1번

1.

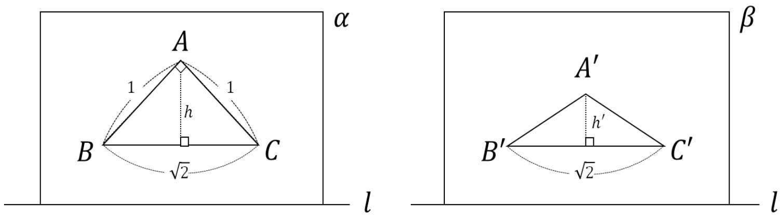
삼각형 ABC의 평면 β로의 정사영을 $A'B'C'$이라고 하고 h와 h'을 각각 삼각형 ABC와 $A'B'C'$의 높이라고 하면

h = (삼각형ABC의높이) = $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

h' = (삼각형$A'B'C'$의높이) = $h \cdot \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta$

$\overline{A'B'} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\cos^2\theta}$

이다.



2.

선분 PQ를 가장 긴 변으로 하고 다음과 같은 성질을 만족하는 평면 α위의 직각삼각형 PRQ를 생각한다.

- 직선 PR과 직선 l은 수직이다.
- 직선 RQ와 직선 l은 평행이다.

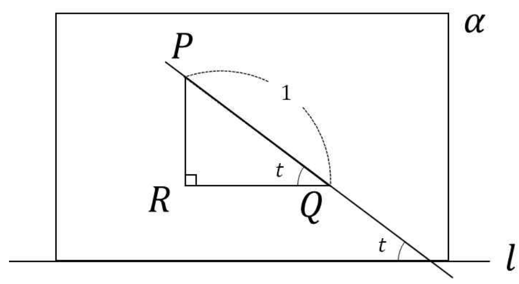
이 때, $\angle Q = t$, $\overline{PR} = \sin t$, $\overline{RQ} = \cos t$이다. 삼각형 PQR의 평면 β위로의 정사영을 $P'Q'R'$이라고 하면 이 삼각형은 $\angle R' = 90^\circ$인 직각삼각형이다. 따라서

$\overline{P'R'} = \sin t\cos\theta$, $\overline{R'Q'} = \cos t$

이므로

$\overline{P'Q'} = \sqrt{\sin^2 t\cos^2\theta + \cos^2 t}$

이다.



3.

점 R, S, T중 직선 l에 가장 가까운 점을 R이라고 하자. 이제 직선 RS가 직선 l과 이루는 각을 t라고 하면 직선 TS가 직선 l과 이루는 각은 $\frac{\pi}{3}-t$이고, 직선 RT가 직선 l과 이루는 각은 $\frac{\pi}{3}+t$이다. 문제 2의 식을 적용하면 삼각형 $R'S'T'$의 각 변의 길이의 제곱은 다음과 같다.

$$\overline{R'S'}^2 = \sin^2 t\cos^2\theta + \cos^2 t$$

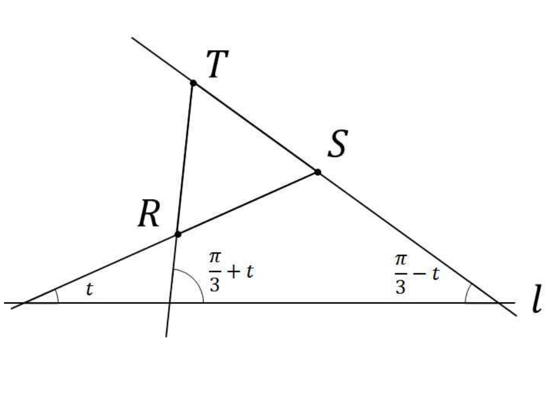
$$\begin{aligned}\overline{T'S'}^2 &= \sin^2\left(\frac{\pi}{3}-t\right)\cos^2\theta + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}-t\right)\\ &= \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos t - \cos\frac{\pi}{3}\sin t\right)^2\cos^2\theta + \left(\cos\frac{\pi}{3}\cos t + \sin\frac{\pi}{3}\sin t\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{R'T'}^2 &= \sin^2\left(\frac{\pi}{3}+t\right)\cos^2\theta + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}+t\right)\\ &= \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos t + \cos\frac{\pi}{3}\sin t\right)^2\cos^2\theta + \left(\cos\frac{\pi}{3}\cos t - \sin\frac{\pi}{3}\sin t\right)^2\end{aligned}$$

이 세 값을 더하면

$\overline{R'S'}^2 + \overline{T'S'}^2 + \overline{R'T'}^2 = \frac{3}{2}\cos^2\theta + \frac{3}{2}$이다.

$\cos\theta = \frac{3}{\pi}$을 대입하면 답은 $\frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{\pi}\right)^2 + \frac{3}{2} = \frac{27+3\pi^2}{2\pi^2}$ 이다.



한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

오전-2번

1. 꺼낸 카드에 적힌 수를 X라고 할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산은 다음과 같이 계산된다.

$\mathrm{E}(X)=\dfrac{1+2+3}{3}=2=\mathrm{E}(\overline{X})$,

$\mathrm{V}(X)=\dfrac{(1-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2}{3}=\dfrac{2}{3}$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{54}=\dfrac{1}{81}$

$n=54$가 충분히 크기 때문에 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(2,1/81)$을 따른다.

$\mathrm{E}(-2\overline{X})=-2\mathrm{E}(\overline{X})=-4$

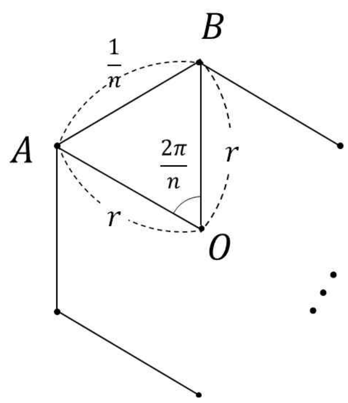
$\mathrm{V}(-2\overline{X})=(-2)^2\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{4}{81}$

즉, $-2\overline{X}$의 평균과 분산은 각각 -4와 $4/81$이므로 확률변수 $Z=\dfrac{-2\overline{X}+4}{\sqrt{4/81}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}\left(-2\overline{X}\geq-\dfrac{11}{3}\right)=\mathrm{P}\left(Z\geq\dfrac{-11/3+4}{2/9}\right)=P(Z\geq1.5)=1-\mathrm{P}(Z\leq1.5)=0.0668$이 된다.

2. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$를 미분하면 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$를 얻는다. 따라서 $f'(e)=0$이고, $x<e$에서 $f'(x)>0$, $x>e$에서 $f'(x)<0$임을 알 수 있다. 만일 $a<b$인 순서쌍 (a,b)가 $a^b=b^a$를 만족한다면 $\dfrac{\ln a}{a}=\dfrac{\ln b}{b}$, 즉 $f(a)=f(b)$가 성립한다. 여기서 $f(x)$가 $x<e$에서는 증가, $x>e$에서는 감소하므로, 만일 $e<a<b$ 라면 $f(a)>f(b)$, $a<b<e$라면 $f(a)<f(b)$가 되어 $f(a)=f(b)$가 불가능하다.
따라서 $a<e<b$여야만 $f(a)=f(b)$를 얻을 수 있다. 여기서 무리수 $e=2.71...$이므로 이보다 작은 양의 정수 a는 1 또는 2여야만 하는데, 모든 $b>e$에 대해 $f(1)=0<f(b)$이므로 $a=1$일수는 없다. 만일 $a=2$라면 양의 정수 b또한 2의 제곱꼴이 되고, $b=4$가 $a^b=b^a$를 만족함을 알 수 있다. 역시 4보다 큰 값 b'에 대해서는 $f(2)=f(4)>f(b')$이므로, $b=4$가 $f(2)=f(b)$를 만족하는 유일한 값이다. 우리가 앞서 $a<b$를 가정했으나 대칭적으로 $b<a$ 또한 가능하고, 따라서 모든 양의 정수 순서쌍 (a,b)는 $(2,4),(4,2)$가 된다.

3. 점 O를 정 n각형의 외접원의 중심, 점 A,B를 정 n각형의 이웃한 두 꼭짓점이라고 하자.



삼각형 OAB에서 $\left(\dfrac{1}{n}\right)^2=2r^2-2r^2\cos\dfrac{2\pi}{n}$, $\quad r^2=\dfrac{1}{2n^2\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)}$ 이므로

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}r^2\sin\dfrac{2\pi}{n}=\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{4n^2\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)}$ 이므로 정 n각형의 넓이 $f(n)$은

$f(n)=n\times\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{4n\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)}$ 이다. 따라서

$f(12)=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{6}}{48\left(1-\cos\dfrac{\pi}{6}\right)}=\dfrac{1}{48(2-\sqrt{3})}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{48}$ 이고,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(n)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{4n\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{4n}\cdot\dfrac{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}{\sin\dfrac{2\pi}{n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{4n}\cdot\dfrac{\dfrac{2\pi}{n}}{\sin\dfrac{2\pi}{n}}\cdot\dfrac{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}{\dfrac{2\pi}{n}}=\dfrac{1}{4\pi}$ 이다.

한양대학교

답안지 (자연계)

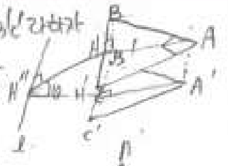
답안지 바코드

300391

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:030401)	

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 삼각형 ABC의 평면 β로의 정사영을 삼각형 A'B'C'라 하자.
점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

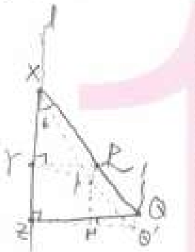


$\overline{BC}$와 직선 l이 평행하므로,
제시문에 의해 $\angle AH'A' = \theta$이다.
이때, $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$이고 ∠A는 직각이므로,
$\overline{BC} = \sqrt{2}$, $\overline{AH} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\overline{B'C'} = \overline{BC} = \sqrt{2}$

$\therefore \overline{A'H'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \cos\theta$
$\overline{BC}$와 직선 l이 평행하고 △ABC는 이등변삼각형이므로,
$\overline{B'A'} = \overline{C'A'}$이다.
$\therefore \overline{B'H'} = \frac{1}{2}\overline{B'C'} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{A'H'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta$이므로

$$\overline{A'B'} = \sqrt{(\overline{B'H'})^2 + (\overline{A'H'})^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\cos^2\theta + 1}$$

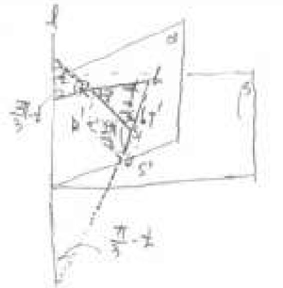
2. 직선 PQ의 연장선이 직선 l과 만나는 점을 X,
점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 Y,
점 Q에서 직선 l에 내린 수선의 발을 Z,
점 P, Q의 평면 β로의 정사영을 P', Q'라 하자.



$\overline{PQ} = 1$이므로 $\overline{YZ} = \cos t$이다.
$\overline{PX} = a$라 하면, $\overline{XY} = a\cos t$, $\overline{PY} = a\sin t$, $\overline{P'Y} = a\sin t\cos\theta$
$\overline{ZQ} = (a+1)\sin t$, $\overline{ZQ'} = (a+1)\sin t\cos\theta$
점 P'에서 선분 ZQ'에 내린 수선의 발을 H라 하면,
$\overline{YZ} = \overline{P'H} = \cos t$, $\overline{HQ'} = \overline{ZQ'} - \overline{ZH} = \overline{ZQ'} - \overline{P'Y}$
$= (a+1)\sin t\cos\theta - a\sin t\cos\theta$
$= \sin t\cos\theta$

$$\therefore \overline{P'Q'} = \sqrt{\overline{P'H}^2 + \overline{HQ'}^2} = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t\cos^2\theta}$$

3. 선분 RS, 선분 ST, 선분 RT 중 임의의 선분이 직선 l과 이루는 각의 크기를 t라 하자.



그림에 의해,
△RST가 정삼각형이므로
세 선분이 직선 l과 이루는 각의 크기는
t, $\frac{\pi}{3} - t$, $\frac{2\pi}{3} - t$이다.

이때, 2에서 직선 l과 이루는 각의 크기가 t일 때 정사영의 길이를 구했고, $\overline{RS} = \overline{RT} = \overline{ST} = 1$이므로,

$$\overline{R'S'}^2 + \overline{S'T'}^2 + \overline{T'R'}^2 = \cos^2 t + \sin^2 t\cos^2\theta + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - t\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - t\right)\cos^2\theta + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - t\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - t\right)\cos^2\theta$$

이때,
$\cos\left(\frac{\pi}{3} - t\right) = \frac{1}{2}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t$ $\sin\left(\frac{\pi}{3} - t\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$
$\cos\left(\frac{2\pi}{3} - t\right) = -\frac{1}{2}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t$ $\sin\left(\frac{2\pi}{3} - t\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t$ 이므로

(구하고자 하는 값) ($\cos\theta = \frac{3}{\pi}$이므로)

$$= \cos^2 t + \sin^2 t \cdot \frac{9}{\pi^2} + \left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t\right)^2 \cdot \frac{9}{\pi^2} + \left(-\frac{1}{2}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t\right)^2 \cdot \frac{9}{\pi^2}$$

$$= \cos^2 t + \sin^2 t \cdot \frac{9}{\pi^2} + \frac{1}{2}\cos^2 t + \frac{3}{2}\sin^2 t + \left(\frac{3}{2}\cos^2 t + \frac{1}{2}\sin^2 t\right)\frac{9}{\pi^2}$$

$$= \frac{3}{2}(\cos^2 t + \sin^2 t) + \frac{9}{\pi^2}\left(\frac{3}{2}\cos^2 t + \frac{3}{2}\sin^2 t\right)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{9}{\pi^2} \times \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{27}{2\pi^2}$$

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

300160

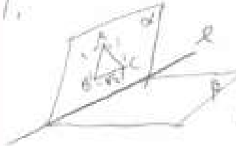
지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:030401)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨간색이나 파란색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 새 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.



이와 같은 상황에서 점 A에서 선분 $\overline{BC}$에 수선의 발을 내리고 그 점을 H라고 하자.

점 A, B, C, H가 평면 β로 정사영 되었을 때의 점을 A', B', C', H'이라고 하자.

$\overline{A'H'} = \overline{AH} \times \cos\theta$ 이고 $\overline{B'H'} = \overline{BH}$ 이다.

$\overline{AH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\overline{BH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $\overline{A'H'} \perp \overline{B'H'}$ 이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{A'B'} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\cos^2\theta + \frac{1}{2}}$ 이다.

2.

이와 같은 상황에서 평면 α만 다시 그려보자

점 P를 지나고 직선 ℓ과 평행인 직선과 점 Q를 지나고 직선 ℓ과 수직인 직선의 교점을 K라고 하자.

문제 1과 같이 정사영 된 점들을 각각 Q', P', K' 이라고 하면

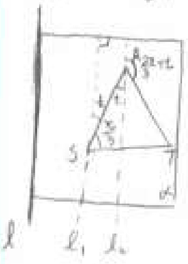
$\overline{KQ} = \sin t$ $\overline{KP} = \cos t$ 이다.

여기서 문제 1과 같이 $\overline{K'Q'} = \overline{KQ} \times \cos\theta$, $\overline{K'P'} = \overline{KP}$ 이고

$\overline{K'Q'} \perp \overline{K'P'}$ 이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{PQ}$의 평면 β 위로 정사영의 길이는 $\sqrt{\sin^2 t\cos^2\theta + \cos^2 t}$ 이다.

3. ~~문제 2와 같이~~ 평면 α 위의 정삼각형을 그려보자.



ℓ과 평행하면서 점 S를 지나는 직선을 ℓ_1, ℓ과 평행하면서 점 R을 지나는 직선을 ℓ_2라고 하고 직선 ℓ_1과 선분 SR이 이루는 각의 크기를 t라고 하면 선분 RT가 이루는 각의 크기는 $\frac{2}{3}\pi + t$ 선분 ST가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3} + t$ 이므로

$\overline{R'S'}^2 + \overline{S'T'}^2 + \overline{T'R'}^2$은 문제 1-2에 의하여

$\sin^2 t \times \frac{9}{\pi^2} + \cos^2 t + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}+t\right) \times \frac{9}{\pi^2} + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}+t\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}+t\right) \times \frac{9}{\pi^2} + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+t\right)$

이다. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 과 삼각함수 덧셈 정리에 의해 위의 식을 정리하면

$\left(\frac{9}{\pi^2} - 1\right)\left(\sin^2 t + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}+t\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}+t\right)\right) + 3$ 이고

$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+t\right) = \frac{3}{4}\cos^2 t + \frac{1}{4}\sin^2 t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t \sin t$

$\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}+t\right) = \frac{3}{4}\cos^2 t + \frac{1}{4}\sin^2 t - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t \sin t$ 이므로

$\overline{R'S'}^2 + \overline{S'T'}^2 + \overline{T'R'}^2 = \left(\frac{9}{\pi^2} - 1\right)\left(\sin^2 t + \frac{3}{2}\cos^2 t + \frac{1}{2}\sin^2 t\right) + 3$

$= \left(\frac{9}{\pi^2} - 1\right)\left(\frac{3}{2}\right) + 3$

$= \frac{27}{2\pi^2} + \frac{3}{2}$ 이다.