한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	오전-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 오전 [문제 1]은 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용을 바탕으로 출제되었다. 아래 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

문항1. 교선과 이루는 각도가 45도 인 선분의 정사영의 길이를 직각 이등변 삼각형을 이용하여 구하도록 묻고 있다. cosine의 정의를 이용하여 구할 수 있다.
문항2. 선분을 정사영 했을 때 그 길이를 구하는 문제이다. 문항1을 힌트로 하여 좀 더 일반화된 문제로 직각 삼각형을 이용하여 구할 수 있다.
문항3. 정삼각형을 정사영 했을 때 그 변들의 길이의 합을 구하는 문제이다. 문항 2에서 얻어진 결과와 삼각함수 덧셈정리를 이용하여 구할 수 있다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	선분 A’B’의 길이를 정확히 구했는가?	10
		길이를 구하는 과정이 명료하게 기술되었는가?	20
2	30	선분 A’B’의 길이를 정확히 구했는가?	10
		길이를 구하는 과정이 명료하게 기술되었는가?	20
3	40	정사영된 삼각형의 변들의 제곱의 합을 정확히 구했는가?	20
		요구한 값을 구하는 과정이 타당하고 명료하게 기술되었는가	20

3. 출제 근거

문항1. 2. 교과서 기하(Mirae N 황선욱 외 8인) - P133~134
교과서 기하 (비상 김원경 외 14인) - P118~119
문항3. 교과서 기하(Mirae N 황선욱 외 8인) - P133~134
교과서 기하 (비상 김원경 외 14인) - P118~119
교과서 미적분(신사고 고성은외 5인)- P58~62
교과서 미적분(Mirae N 황선욱 외 8인)- P63~67

한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시 논술고사		
자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	오전-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 오전 [문제 2]는 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용을 바탕으로 출제되었다. 아래 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

문항1. 주어진 상황을 잘 파악하여 표본평균에 대한 식의 평균, 분산을 통해 표준정규분포를 활용하여 확률을 구할 수 있는지 묻고 있다.
문항2. 함수 $f(x)$의 성질과 e의 근사적 값을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는가를 묻고 있다.
문항3. 평면도형에 대한 기본적인 지식을 바탕으로 “수학I - 삼각함수- 삼각함수의 활용” 단원과 “미적분-미분법-여러 가지 함수의 미분” 단원의 삼각함수와 그 극한에 대한 다양한 지식과 성질을 적절히 활용하여, 주어진 극한값을 구할 수 있는가를 묻고 있다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	$-2\overline{X}$의 평균과 분산을 구했는가?	15
		표준정규분포를 활용하여 확률을 제대로 계산했는가?	15
2	40	$f(x)$의 도함수를 이용하여 $f(x)$가 증가와 감소하는 구간을 구했는가?	15
		$f(x)$의 성질과 e의 근사적 값을 알고 가능한 경우의 수를 알아냈는가?	15
		순서쌍 (a,b)의 모든 가능한 값 $(2,4),(4,2)$를 정확한 근거와 함께 모두 구했는가?	10
3	30	$f(12)$의 값을 구했는가?	20
		극한값 $\lim_{n\to\infty} f(n)$을 구했는가?	10

3. 출제 근거

문항1. 교과서 확률과 통계 (Mirae N 황선욱 외 8인) - III 통계 - 1. 확률분포 - 이산확률변수의 기댓값
교과서 확률과 통계 (Mirae N 황선욱 외 8인) - III 통계 - 2. 통계적 추정 - 모집단과 표본
문항2. 교과서 미적분 (미래엔 황선욱 외 8인) - 미분법 - 여러 가지 함수의 미분 - 지수함수와 로그함수의 미분
교과서 미적분 (미래엔 황선욱 외 8인) - 미분법 - 도함수의 활용 - 방정식과 부등식에의 활용
문항3. 교과서 수학I (천재교육 이준열 외 9인) - 삼각함수 - 삼각함수의 활용 - 사인법칙과 코사인법칙
교과서 수학I (천재교육 이준열 외 9인) - 삼각함수 - 삼각함수의 활용 - 삼각형의 넓이
교과서 미적분 (미래엔 황선욱 외 8인) - 미분법 - 여러 가지 함수의 미분 - 삼각함수의 극한

이 줄 위에 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.

X	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$E(X) = \frac{1}{3}\times(1+2+3) = 2$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$= \frac{1}{3}\times(1+4+9) - 2^2$

$= \frac{2}{3}$ $\left(\sigma(X) = \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

$\bar{X} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(2, \frac{1}{54}\times\frac{2}{3}\right) = N\left(2, \left(\frac{1}{9}\right)^2\right)$

$E(-2\bar{X}) = (-2)\times E(\bar{X}) = (-2)\times 2 = -4$

$V(-2\bar{X}) = (-2)^2\times V(\bar{X}) = 4\times\frac{1}{81} = \frac{4}{81}$

$P\left(-2\bar{X} \geq -\frac{11}{3}\right) = P\left(\bar{X} \leq \frac{11}{6}\right) = P\left(Z \leq \frac{\frac{11}{6}-2}{\frac{1}{9}}\right)$

$= P(Z \leq -1.5) = P(Z \geq 1.5) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.5)$

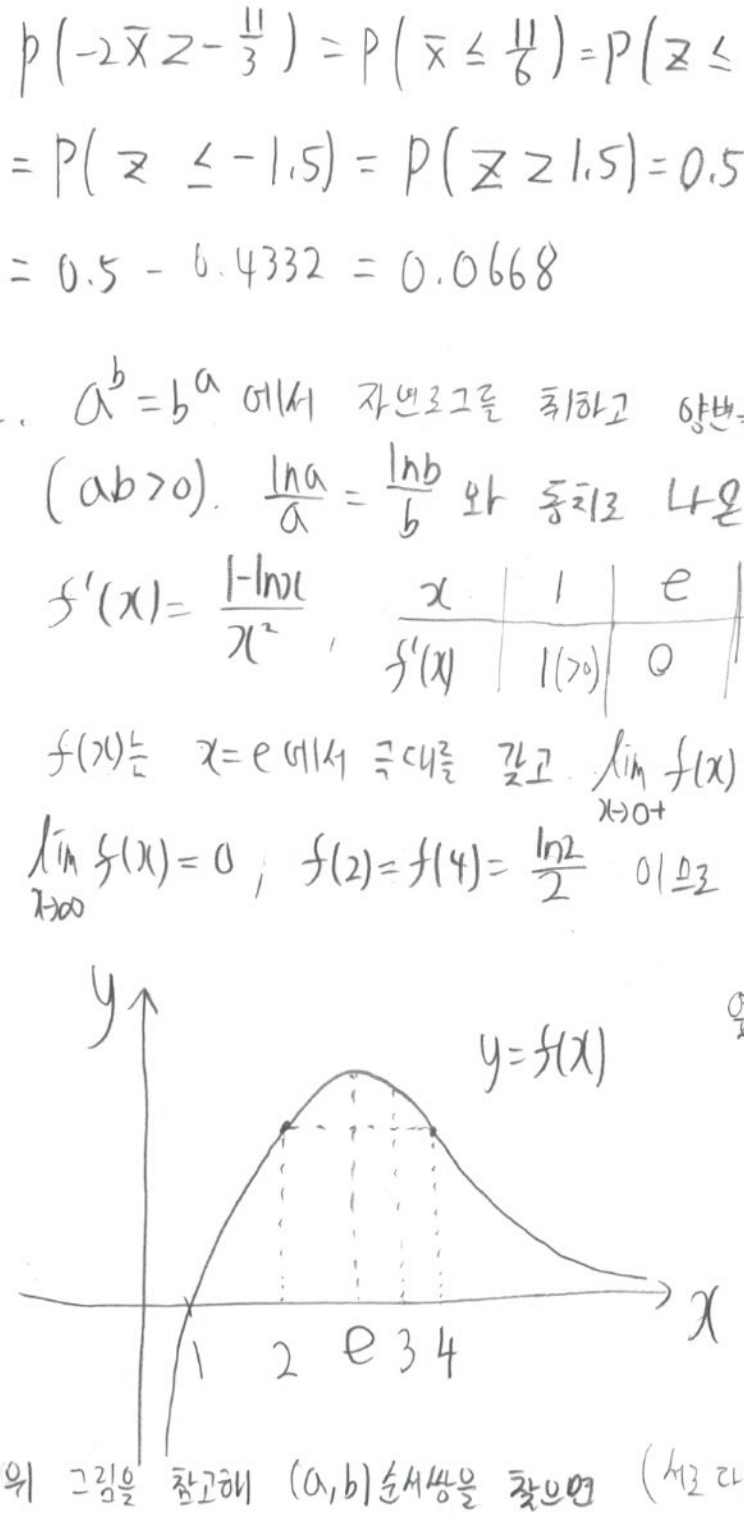
$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$

2. $a^b = b^a$ 에서 자연로그를 취하고 양변을 ab로 나누면 $(ab>0)$. $\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$ 와 동치로 나온다.

$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$,

x	1	e	3
$f'(x)$	$1(>0)$	0	$\frac{1-\ln 3}{9}(<0)$

$f(x)$는 $x=e$에서 극대를 갖고 $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$; $f(2) = f(4) = \frac{\ln 2}{2}$ 이므로 $y=f(x)$를 그리면



옆과 같다.

위 그림을 참고해 (a,b) 순서쌍을 찾으면 (서로 다른 양의 정수쌍) $(2,4)$ $(4,2)$ 뿐임을 알 수 있다.

($\because$ $a<e<b$ or $a>e>b$를 만족해야 조건을 만족할 수 있는데 a, b 중 작은 것이 1이면 나머지는 1이어야 함숫값이 같아지므로 안되고, 2일 때는 성립하고, 3이면 정의역 $x>e$에서 $f(x)$가 감소하므로 함숫값 같은게 존재하지 않는다)

3. 원 위에 정 n각형을 놓고 각 점을 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$이라 부르자. 또 원의 중심 O에 대해 $\angle a_1Oa_2 = \theta$라 하면. $n\theta = 2\pi$. 또 $\overline{Oa_i} = r$ $(i = 1 \sim n)$ 이라 하면 정 n각형 둘레 길이 $= n\times\left(2r\sin\frac{\theta}{2}\right) = 1$,

$f(n) = n\times\left(S_{\triangle a_1Oa_2}\right) = n\times\frac{1}{2}r^2\sin\theta$

$f(12) = 12\times\frac{1}{2}\times r^2\sin\theta$; $24r\sin\frac{\theta}{2} = 1$, $12\theta = 2\pi$ 이므로 정리하면 $r\times\left(\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}\right) = \frac{1}{24}$ $\left(\because \sin 15° = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}\right)$

$f(12) = 6r^2\sin 30° = 3r^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{48}$.

$n\theta = 2\pi$ 에서 $\lim_{n\to\infty}\theta = \lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n} = 0$

$nr\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$ 에서 $\lim_{n\to\infty} n\theta\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}\times r = \lim_{n\to\infty} 2\pi\times\frac{1}{2}\times r = \frac{1}{2}$; $\lim_{n\to\infty} r = \frac{1}{2\pi}$

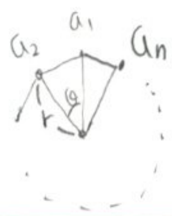
$f(n) = \frac{1}{2}\times r^2\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times n\theta$

$= \pi\times r^2\times\frac{\sin\theta}{\theta}$

$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty}\pi\times r^2\times\frac{\sin\theta}{\theta}$

$= \pi\times\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\times 1$

$= \frac{1}{4\pi}$



이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

[2-1]

한장의 카드를 꺼낼때, 각 카드가 뽑힐 확률은 $\frac{1}{3}$로 같다.

54회 반복하면 카드 1, 2, 3 이 각각 18회씩 나온다

$E(\bar{X}) = \frac{18\times1 + 18\times2 + 18\times3}{54} = 2$ 이다.

$E(-2\bar{X}) = -2E(\bar{X}) = -4$ 이다.

$V(-2\bar{X}) = 4V(\bar{X})$ 이다.

$V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \{E(\bar{X})\}^2 = \frac{1}{81}$

따라서 $V(-2\bar{X}) = 4V(\bar{X}) = \frac{4}{81}$ 이다.

$P(-2\bar{X} \geq -\frac{11}{3}) = P(Z \geq 1.5) = 0.0668$ 이다.

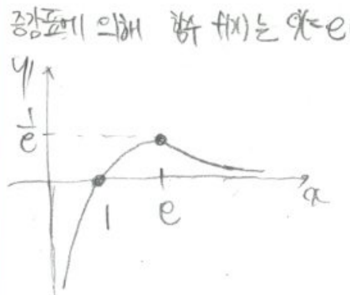
[2-2]

$a^b = b^a$ 에 ln을 씌우면 $b\ln a = a\ln b$, $\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$ 이다. (a, b는 서로다른 양의 정수)

$f(x)$를 미분하면 $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ 이다

x	0	…	$\frac{1}{e}$	…
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗		↘

증감표에 의해 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 최댓값 $\frac{1}{e}$를 갖고 $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ 이므로 그래프 개형은 다음과 같다.



$f(a) = f(b)$ 이어야 한다

① $a < b$ 일때

$1 < a < e$ 여야하고 a는 양의 정수이므로 $a = 2$ 이다

$\frac{\ln b}{b} = \frac{\ln 2}{2}$ 를 만족하는 $b = 4$ 이다

② $b < a$ 일때

$1 < b < e$ 여야하고 b는 양의 정수이므로 $b = 2$ 이다

$\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln 2}{2}$ 를 만족하는 $a = 4$ 이다

따라서 구하는 순서쌍(a, b)는 $(2, 4), (4, 2)$ 이다

[2-3]

반지름이 R인 원에 정 n각형이 내접한다고 하자

원의 중심을 기준으로 정n각형을 하나의 각의 크기가 $\frac{2\pi}{n}$인 이등변 삼각형으로 n등분한다

중심각이 $\frac{2\pi}{n}$ 이므로 사인법칙에 의해 $\frac{\frac{1}{n}}{\sin(\frac{\pi}{n})} = 2R$ 이 성립한다. $R = \frac{1}{2n\sin(\frac{\pi}{n})}$

이때 정n각형의 넓이 $f(n) = \frac{1}{2} \times R^2 \times \sin(\frac{2\pi}{n}) \times n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4n^2\sin^2(\frac{\pi}{n})} \times \sin(\frac{2\pi}{n}) \times n$

$= \frac{1}{4n\tan(\frac{\pi}{n})}$ 이다

$f(12) = \frac{1}{48\tan(\frac{\pi}{12})}$ 이다.

$\tan(\frac{\pi}{12}) = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ 이므로

$f(12) = \frac{1}{48}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{48}$ 이다.

$\lim_{n\to\infty} f(n) = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{n}}{\tan(\frac{\pi}{n})} \times \frac{1}{\pi}$ 이다.

$\frac{\pi}{n} = x$ 로 치환하자

$\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{n}}{\tan(\frac{\pi}{n})} \times \frac{1}{\pi} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} \times \frac{1}{\pi} = \frac{1}{4\pi}$

따라서 $\lim_{n\to\infty} f(n) = \frac{1}{4\pi}$ 이다