한양대학교 2021학년도 신입학전형 수시

자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(2)-1번

1. $36=2^2(2(2^2)+1)$이므로

$a_2\ =(a_1-2020)^{2021}+2020=2021$
$a_4\ =(a_2-2020)^{2021}+2020=2021$
$a_9\ =(a_4-2022)^{2020}+2018=2019$
$a_{18}=(a_9-2020)^{2021}+2020=2019$
$a_{36}=(a_{18}-2020)^{2021}+2020=2019$

이다.

2. k의 형태에 따라서 조건($a_k<2^{2020}$)을 만족하는 지 확인해보자.

[형태 1. $k=2^m,(m\ge 0)$]

$a_1=2021$
$a_2=(a_1-2020)^{2021}+2020=2021$
$a_4=(a_2-2020)^{2021}+2020=2021$
...
$a_{2^m}=(a_{2^{m-1}}-2020)^{2021}+2020=2021$

이므로 $a_k=2021$이다.

[형태 2. $k=2^m+1,(m\ge 1)$]

$a_3=(a_1-2022)^{2020}+2018=2019$
$a_5=(a_2-2022)^{2020}+2018=2019$
...
$a_{2^m+1}=(a_{2^{m-1}}-2022)^{2020}+2018=2019$

이므로 $a_k=2019$이다.

[형태 3. $k=2^l(2^m+1),(m,l\ge 1)$]

(형태 2)를 만족하는 $a_{2^m+1}=2019$임을 알 수 있다. 또한, 제시문의 ㄴ 에 의해

$a_{2(2^m+1)}=(a_{2^m+1}-2020)^{2021}+2020=2019$
$a_{2^2(2^m+1)}=(a_{2(2^m+1)}-2020)^{2021}+2020=2019$
...
$a_{2^l(2^m+1)}=(a_{2^{l-1}(2^m+1)}-2020)^{2021}+2020=2019$

이므로 $a_k=2019$이다.

[형태 4. $k=2^l(2^m+1)+1,(m,l\ge 1)$]

(형태 2)를 만족하는 $a_{2^m+1}=2019$임을 알 수 있다. $l=1$인 경우, 제시문의 ㄷ 에 의해

$a_{2(2^m+1)+1}=(a_{2^m+1}-2022)^{2020}+2018>2^{2020}$이다.

$l>1$인 경우, 제시문 ㄴ 에 의해 $a_{2^{l-1}(2^m+1)}=2019$이고, 제시문 ㄷ 에 의해

$a_{2^l(2^m+1)+1}=(a_{2^{l-1}(2^m+1)}-2022)^{2020}+2018>2^{2020}$이다.

따라서, $a_k>2^{2020}$이다.

[형태 5. k는 형태 1, 2, 3, 4가 아닌 나머지 수]

k는 항상 $(\cdots 2^r(2^l(2^m+1)+1)\cdots)$꼴로 쓸 수가 있으며(단, $m,l,r\ge 1$), (형태 4)에 의해 $a_{2^l(2^m+1)+1}>2^{2020}$임을 알 수 있다.

a_k는 제시문 ㄴ 과 ㄷ을 반복적용해서 계산이 가능한데, 항상 2022보다 큰 수에 대해 증가하므로 $a_k>2^{2020}$이다.

$a_k<2^{2020}$을 만족하는 경우는 (형태 1) (즉, $k=2^m$), (형태 2) (즉, $2^m+1,(m\ge 1)$), (형태 3) (즉, $2^l(2^m+1),(m,l\ge 1)$)이 전부이다. 이들 중 $k\le 2^{100}$를 만족하는 자연수는 (형태 1)의 101가지 ($m=0,1,\ldots 100$), 형태 2의 99가지 ($m=1,2,\ldots 99$), 형태 3의 $\dfrac{98\cdot 99}{2}=4851$가지 ($(l,m)=(1,1),(1,2),\ldots,(1,98),(2,1),(2,2),\ldots,(2,97),(3,1),(3,2),\ldots,(3,96),\ldots,(98,1)$)

총 101+99+4851=5051

3. $\alpha=2019$이다. $a_k=2019$는 1번 풀이의 (형태 2)와 (형태 3)의 k만 가능하다.

(형태 2)는 $m=1,2,\ldots n-1$인 경우에만 $2^m+1\le 2^n$를 만족하므로 $n-1$개가 가능하다.

(형태 3)은 $l=1,\ldots,n-2$인 경우, $m=1,2,\ldots n-l-1$인 경우에만 $2^l(2^m+1)\le 2^n$를 만족하므로

$\displaystyle\sum_{l=1}^{n-2}(n-l-1)=(n-1)(n-2)-\frac{(n-2)(n-1)}{2}=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ 개가 가능하다.

따라서, $c_n=\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$이고, $\displaystyle S_n=\sum_{t=1}^{n}\frac{2(n-1)}{2c_n+t(n-1)}=\sum_{t=1}^{n}\frac{2}{n+t}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{2}{1+\frac{t}{n}}$ 를 만족한다.

따라서, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\frac{2}{1+x}dx=[2\ln(1+x)]_0^1=2\ln 2$ 이다.

자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(2)-2번

한양대학교 2021학년도 신입학전형 수시

1. 함수 $f(x)=a\sqrt{1+e^x}+\ln\left(\sqrt{1+e^x}-b\right)-\ln\left(\sqrt{1+e^x}+b\right)$를 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\left(a+\frac{1}{\sqrt{1+e^x}-b}-\frac{1}{\sqrt{1+e^x}+b}\right)=\sqrt{1+e^x}$$

따라서

$$e^x\left[a+\frac{2b}{(1+e^x)-b^2}\right]=2(1+e^x)$$

즉

$$e^x\left[a\{(1+e^x)-b^2\}+2b\right]=2(1+e^x)\{(1+e^x)-b^2\}$$

전개하면

$$ae^{2x}+\left[a(1-b^2)+2b\right]e^x=2e^{2x}+2(2-b^2)e^x+2(1-b^2)$$

양변의 계수를 비교하면 $a=2,\ b=1$이다. 따라서 $a+b=3$

2. 제시문 <나>, 치환적분법 및 문제 1에 의하여

$$g(k)=\int_k^{k+e^{-k}}\sqrt{1+e^{2t}}\,dt=\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2e^{-k}}\sqrt{1+e^x}\,dx\ \ \left(x=2t\ \ \frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(f(2k+2e^{-k})-f(2k)\right)$$

<해 1> 평균값 정리에 의하여

$$g(k)=\frac{1}{2}f'(c)\,2e^{-k}=e^{-k}f'(c)=e^{-k}\sqrt{1+e^c}$$

를 만족하는 c가 열린구간 $(2k, 2k+2e^{-k})$에 적어도 하나 존재한다. 구간 $(-\infty,\infty)$에서 $f''(x)=A'(x)>0$이므로 $f'(x)$는 증가한다.
따라서

$$e^{-k}\sqrt{1+e^{2k}}<g(k)=e^{-k}\sqrt{1+e^c}<e^{-k}\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}\text{ 이고}$$

$$\lim_{k\to\infty}e^{-k}\sqrt{1+e^{2k}}=\lim_{k\to\infty}\sqrt{1+e^{-2k}}=1,\quad \lim_{k\to\infty}e^{-k}\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}=\lim_{k\to\infty}\sqrt{e^{2e^{-k}}+e^{-2k}}=1$$

제시문 <다>에 의하여 $\displaystyle\lim_{k\to\infty}g(k)=1$

<해 2> 문제 1에 의하여

$$g(k)=\frac{1}{2}\left(f(2k+2e^{-k})-f(2k)\right)=\left[\sqrt{1+e^x}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)\right]_{2k}^{2k+2e^{-k}}$$

$$=\left(\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}-\sqrt{1+e^{2k}}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}-1}{\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}+1}\times\frac{\sqrt{1+e^{2k}}+1}{\sqrt{1+e^{2k}}-1}\right)\ \ \ldots\ldots\ (3)$$

한편

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}-\sqrt{1+e^{2k}}\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{e^{2k}\left(e^{2e^{-k}}-1\right)}{\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}+\sqrt{1+e^{2k}}}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{e^{k}\left(e^{2e^{-k}}-1\right)}{\sqrt{e^{-2k}+e^{2e^{-k}}}+\sqrt{e^{-2k}+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}e^k\left(e^{2e^{-k}}-1\right)=\lim_{l\to0}\frac{e^{2l}-1}{2l}=1\ \ (l=e^{-k}\text{로 치환})\ \ldots\ldots\ (4)$$

이고

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}-1}{\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}+1}\times\frac{\sqrt{1+e^{2k}}+1}{\sqrt{1+e^{2k}}-1}\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{e^{-2k}+e^{2e^{-k}}}-e^{-k}}{\sqrt{e^{-2k}+e^{2e^{-k}}}+e^{-k}}\times\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{e^{-2k}+1}-e^{-k}}{\sqrt{e^{-2k}+1}+e^{-k}}=1\times1=1$$

따라서

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}-1}{\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}+1}\times\frac{\sqrt{1+e^{2k}}+1}{\sqrt{1+e^{2k}}-1}\right)=\ln1=0\ \ \ldots\ldots\ (5)$$

식 (3), (4), (5)로부터

$$\lim_{k\to\infty}g(k)=1+0=1$$

을 얻는다.

3. $G(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하면, $F(x)=G(x)+C$ (C는 상수)가 성립한다. 따라서

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}F(2x)=\lim_{x\to\infty}e^{-x/2}F(x)=\lim_{x\to\infty}e^{-x/2}(G(x)+C)=\lim_{x\to\infty}e^{-x/2}G(x)$$

의 값을 구하면 된다. 문제 1에 의해

$$G(x)=2\int_0^x\sqrt{1+e^t}\,dt+\int_0^x\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^t}-1}{\sqrt{1+e^t}+1}\right)dt=2(f(x)-f(0))+\int_0^x\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^t}-1}{\sqrt{1+e^t}+1}\right)dt \quad \text{......} (6)$$

한편 구간 $(-\infty,\infty)$에서 $f'(x)$가 증가하고, 구간 $(-1,\infty)$에서 $\dfrac{x-1}{x+1}$도 증가하므로 임의의 양수 t에 대하여

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\le\frac{\sqrt{1+e^t}-1}{\sqrt{1+e^t}+1}\le 1$$

$$-\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)\le\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^t}-1}{\sqrt{1+e^t}+1}\right)\le 0 \quad \text{......} (7)$$

제시문 <라>에 의하여, 임의의 양수 x에 대하여

$$-\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)x\le\int_0^x\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^t}-1}{\sqrt{1+e^t}+1}\right)dt\le 0$$

제시문 <다>에 의하여

$$0=-\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)\lim_{x\to\infty}e^{-x/2}x\le\lim_{x\to\infty}e^{-x/2}\int_0^x\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^t}-1}{\sqrt{1+e^t}+1}\right)dt\le 0$$

식 (6), (7)과 제시문 <다>에 의하여

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}e^{-x/2}G(x)&=2\lim_{x\to\infty}e^{-x/2}(f(x)-f(0))+\lim_{x\to\infty}e^{-x/2}\int_0^x\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^t}-1}{\sqrt{1+e^t}+1}\right)dt\\&=2\lim_{x\to\infty}e^{-x/2}f(x)+0=2\lim_{x\to\infty}e^{-x/2}f(x)\\&=4\lim_{x\to\infty}e^{-x/2}\sqrt{1+e^x}+2\lim_{x\to\infty}e^{-x/2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)\\&=4+0=4\end{aligned}$$

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:020301)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

(1) $a_{36} = (a_{18} - 2020)^{2021} + 2020$

$a_{18} = (a_9 - 2020)^{2021} + 2020$

$a_9 = (a_4 - 2022)^{2020} + 2018$

$a_4 = (a_2 - 2020)^{2021} + 2020$

$a_2 = (a_1 - 2020)^{2021} + 2020$

$= 2021$.

차례대로 계산하면

$a_4 = 2021$

$a_9 = 2019$

$a_{18} = 2019$

$a_{36} = 2019$

(2)

위의 계산에서

$a_k = 2021$ 이면

$a_{2k} = 2021$, $a_{2k+1} = 2019$ 이고,

$a_k = 2019$ 이면

$a_{2k} = 2019$, $a_{2k+1} = 3^{2020} + 2018$ 이다.

그런데 $a_k = 3^{2020} + 2018$ 이 되면 a_{2k} 와 a_{2k+1} 은 더 커져서 2^{2020} 보다 더 커지게 된다.

따라서 $a_k < 2^{2020}$ 인 a_k는 2021, 2019 만 존재한다

$a_k < 2^{2020}$ 인 수만 수형도로 간략하게 표현하면

- $a_1 = 2021$
  - $a_2 = 2021$
    - $a_4 = 2021$
      - $a_8 = 2021$
      - $a_9 = 2019$
    - $a_5 = 2019$
      - $a_{10} = 2019$
      - a_{11}
  - $a_3 = 2019$
    - $a_6 = 2019$
      - $a_{12} = 2019$
      - a_{13}
    - a_7
      - a_{14}
      - a_{15}

이다

수형도 상의 세로줄에 나란한 수들을 하나의 세트로 묶어서 생각해보자

$2^{t-1} \le k \le 2^t - 1$ ($t \ge 1$ 인 정수) 에서

$a_k = 2021$ 인 k는 1개,

$a_k = 2019$ 인 k는 $t-1$개 존재한다

즉, t번째 세트에 존재하는 $a_k < 2^{2020}$ 을 만족하는 k의 개수는 t개 이다

그런데 $k \le 2^{100}$ 이어야 하므로 101번째 세트의 첫번째 수까지 세어야 한다

각 세트의 첫번째 수는 항상 2021 이므로 이를 계산하면

$$\sum_{t=1}^{100} (t) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101 + 1$$

$$= 5051.$$

5051개 존재한다

(3)

(2)에서 보인 것을 이용하면 $\alpha = 2019$ 이다

또한 t번째 세트에 있는 $a_k = \alpha$ 인 k의 개수는 $t-1$개 이다

이에 따라 c_n을 계산하면

n번째 세트 첫번째 수까지 세어야 하므로

$$c_n = \sum_{t=1}^{n} (t-1) = \sum_{t=0}^{n-1} t = \frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot n$$

$$S_n = \sum_{t=1}^{n} \frac{2(n-1)}{n^2 - n + t(n-1)}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{2}{n+t}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t=1}^{n} \frac{2}{n+t} = \lim_{n\to\infty} \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{2}{1+\frac{t}{n}} \cdot \frac{1}{n} \right)$$ 여기서 $x_t = \frac{t}{n}$, $\Delta x = \frac{1}{n}$ 이라 하면

$$= \int_0^1 \frac{2}{1+x} dx = \int_1^2 \frac{2}{x} dx$$

$$= [2 \ln x]_1^2 = 2 \ln 2$$

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:020301)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.

$a_{36} = (a_{18} - 2020)^{2021} + 2020$ ⋯ ①

$a_{18} = (a_9 - 2020)^{2021} + 2020$ ⋯ ②

$a_9 = (a_4 - 2022)^{2020} + 2018$ ⋯ ③

$a_4 = (a_2 - 2020)^{2021} + 2020$ ⋯ ④

$a_2 = (a_1 - 2020)^{2021} + 2020$ ⋯ ⑤

$a_1 = 2021$ 이므로 ⑤에 대입하면 $a_2 = 2021$ 이고 ④에 대입하면

$a_4 = 2021$ ③에 대입하면 $a_9 = 2019$ 이고 ②에 대입하면 $a_{18} = 2019$ 이다.

①에 대입하면 $a_{36} = 2019$ 이다.

2

제시문 ㄷ의 개수에 따라 a_k의 값이 달라지므로

(i) $k = 2^x$ 일때 (단 $x \geq 0$) 즉, ㄷ이 없을때

$a_k = 2021$ 이고 $k \leq 2^{100}$ 을 만족하는 수는

x가 0부터 100까지 101개이다.

(ii) $k = (2^y+1)2^z$ 일때 (단 $y \geq 1$, $z \geq 0$) 즉, ㄷ이 한번 쓰일때

$a_k = 2019$ 이고 $k \leq 2^{100}$ 을 만족하는 수는

$y = 1$ 일때 z는 0부터 98까지 99개

$y = 2$ 일때 z는 0부터 97까지 98개

⋮

$y = 99$ 일때 z는 0 이고 1개이다.

따라서 만족하는 (y, z) 순서쌍 개수는 $\sum_{t=1}^{99} n = \frac{99 \times 100}{2} = 4950$ 이다.

(iii) $k = (2^a+1)(2^b+1)$ 즉 ㄷ이 두번 쓰이면서 마지막에 ㄷ으로 끝날때

$a_k = 3^{2020} + 2018 > 2^{2020}$

여기서 ㄴ 또는 ㄷ을 더하더라도 a_k는 2^{2020}을 초과하므로

ㄷ이 두번이상 쓰일때 만족하는 경우는 없다.

(i)(ii),(iii)에 의해 자연수 k의 개수는 $101 + 4950 = 5051$ 이다

3

2에 정의에서 알 수 있듯이 $\alpha = 2019$가 되고

$a_k = (2^y+1)2^z$ 일때 (단, $y \geq 1$, $z \geq 0$) $k \leq 2^n$을 만족하는경우는

$y = 1$ 일때, z는 0부터 $n-2$까지 $n-1$개

$y = 2$ 일때, z는 0부터 $n-3$까지 $n-2$개

⋮

$y = n-1$ 일때, z는 0 일때 1개

따라서 만족하는 (y, z) 순서쌍 개수는

$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2} = c_n$

$S_n = \sum_{t=1}^{n} \frac{2(n-1)}{2c_n + t(n-1)} = \sum_{t=1}^{n} \frac{2}{n+t} = \sum_{t=1}^{n} \frac{2}{n} \times \frac{1}{1+\frac{t}{n}}$ 이다

$\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{t=1}^{n} \frac{2}{n} \times \frac{1}{1+\frac{t}{n}} = 2\int_1^2 \frac{1}{x} dx = 2[\ln x]_1^2 = 2\ln 2$ 이다