한양대학교 2021학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	출제 의도 및 평가 지침	오후(2)-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

1번 문제는 제시문에서 주어진 조건들을 활용하여 수열의 한 항을 구할 수 있는지를 묻는다. 2번 문제에서는 제시문에서 주어진 조건을 만족하는 수열의 특징을 잘 분석하고 이를 토대로 한 문제해결 능력을 묻는다. 3번문제에서는 제시문에서 주어진 조건을 활용하여 새로운 형태의 수열 $\{c_n\}$을 유도하고, 이를 활용하여 정적분 문제를 풀 수 있는지 묻는다.

[문제1]-1은 제시문에서 귀납적으로 정의된 수열의 규칙성을 파악하는 데에 있어 의미가 있는 제36항의 값을 묻는 문제이다. 개연적인 추론 능력을 측정 할 뿐만 아니라 이후에 진행될 [문제1]-2,3의 해결에 필요한 수열 $\{a_n\}$에 대한 이해를 유도하는 중간 단계적인 성격을 지닌 문제이다.
[문제1]-2는 수열 $\{a_n\}$에서 같은 값을 갖는 항들이 규칙적으로 반복되는 특징을 이해하고, 등차수열의 합을 이용하여 조건을 만족시키는 항들의 개수를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.
[문제1]-3은 수열 $\{a_n\}$에서 특정한 값을 갖는 항들의 개수로 정의된 새로운 수열 $\{c_n\}$을 구하고 그 일반항 c_n으로 이루어진 급수의 합을 정적분으로 변형하여 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	10	a_{36}을 잘 계산하였는가?	10
2	50	$a_k = 2021,\ k < 2^{100}$이 되는 k의 개수를 구하였는가?	10
		$a_k = 2019,\ k < 2^{100}$이 되는 k의 개수를 구하였는가?	20
		$a_k > 2^{2020}$이 되는 k에 대해 그 이유를 잘 설명하였는가?	20
3	40	c_n을 잘 구하였는가?	20
		수열의 합을 잘 구하였는가?	20

3. 출제 근거

수학I, Mirae N (확선욱 외 8인), 좋은책 신사고 (고성은 외 6인) : III수열 - 1. 등차수열과 등비수열
수학I, Mirae N (확선욱 외 8인), 좋은책 신사고 (고성은 외 6인) : III수열 - 2. 수열의 합
수학I, Mirae N (확선욱 외 8인), 좋은책 신사고 (고성은 외 6인) : III수열 - 3. 수학적 귀납법
미적분, Mirae N (확선욱 외 8인), 좋은책 신사고 (고성은 외 5인): III.적분법 - 1. 여러 가지 적분

한양대학교 2021학년도 신입학전형 수시 논술고사		
자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	오후(2)-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

본 문제는 수학II-함수의 극한과 연속 및 미적분-미분법, 적분법 단원에서 공부한 함수의 극한, 함수의 미적분에 대한 기본적인 지식을 묻는다. 다음 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

2-1번 문제는 합성함수의 미분법을 이용하여 주어진 함수를 미분할 수 있는지를 묻는 문제이다.
2-2번 문제는 곡선의 길이 공식을 활용하여 주어진 곡선의 길이를 구하고, 이의 극한값을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.
2-3번 문제는 주어진 함수의 부정적분의 형태를 추론하여 제시된 값을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	20	$a+b$의 값을 잘 구하였는가?	20
2	40	곡선 $e^x\left(k \le x \le k+\frac{1}{e^k}\right)$의 길이 $g(k)$를 잘 계산하였는가?	10
		$\lim_{k\to\infty} g(k)$의 값을 잘 계산하였는가? (직접 계산 또는 평균값 정리의 응용)	30
3	40	함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$를 적절히 정하고 이를 계산할 수 있는 형태로 표현하였는가?	20
		위에서 구한 $F(x)$를 통해 제시된 값을 잘 계산하였는가?	20

3. 출제 근거

본 문제는 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생들은 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 교과서 수학 II, 미적분의 주요내용을 다루고 있다. 3개의 소문항은 교과서의 내용과 다음과 같이 연계되며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용만으로 구성되어 있다.

교과서 수학II (비상교육 김원경 외 14인) : 함수의 극한과 연속 - 함수의 극한 - 함수의 극한값의 계산 p. 18-24

교과서 미적분 (천재교과서 류희찬 외 9인) : 여러 가지 함수의 미분 - 지수함수와 로그함수의 도함수 p. 62-67
여러 가지 미분법 - 합성함수의 미분법 p. 103-107
여러 가지 적분법 - 속도와 거리 p. 189-194

이 줄 위에 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함) :

<2-1>

$f(x) = a\sqrt{1+e^x} + \ln(\sqrt{1+e^x}-b) - \ln(\sqrt{1+e^x}+b)$ 에서

$$f'(x) = \frac{ae^x}{2\sqrt{1+e^x}} + \frac{e^x}{2(\sqrt{1+e^x}-b)\sqrt{1+e^x}} - \frac{e^x}{2(\sqrt{1+e^x}+b)\sqrt{1+e^x}}$$

$$= \frac{ae^x(1+e^x-b^2)+e^x(\sqrt{1+e^x}+b)-e^x(\sqrt{1+e^x}-b)}{2\sqrt{1+e^x}(\sqrt{1+e^x}+b)(\sqrt{1+e^x}-b)}$$

$$= \frac{(a+2b-ab^2)e^x + ae^{2x}}{2\sqrt{1+e^x}(1+e^x-b^2)} = \sqrt{1+e^x} \text{ 이다.}$$

$\therefore 2(1+e^x)(e^x-b^2+1) = ae^{2x} + (a+2b-ab^2)e^x$

$x=0, 1$을 대입하여 연립하면 $a=2$, $b=1$을 얻는다.

<2-2>

제시문 (나)에 의하여 $g(k) = \int_k^{k+\frac{1}{e^k}} \sqrt{1+e^{2x}}\,dx = \int_k^{k+\frac{1}{e^k}} f'(2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left\{f(2k+\frac{2}{e^k}) - f(2k)\right\}$ 이다.

$y=f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로 구간 $[2k, 2k+\frac{2}{e^k}]$ 에서 평균값 정리를 적용하면, $f'(c)\frac{2}{e^k} = f(2k+\frac{2}{e^k}) - f(2k)$ 인 $c \in (2k, 2k+\frac{2}{e^k})$ 가 존재한다.

$\lim_{k\to\infty} g(k) = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left\{f(2k+\frac{1}{e^k}) - f(2k)\right\} = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\frac{2\sqrt{1+e^c}}{e^k}$ 이다 (※)

$y=\sqrt{1+e^x}$가 증가함수이므로 $\sqrt{1+e^{2k}} < \sqrt{1+e^c} < \sqrt{1+e^{2k+\frac{2}{e^k}}}$ 이다.

$\therefore \frac{\sqrt{1+e^{2k}}}{e^k} < \frac{\sqrt{1+e^c}}{e^k} < \frac{\sqrt{1+e^{2k+\frac{2}{e^k}}}}{e^k}$ 이다.

$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{1+e^{2k}}}{e^k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{e^{2k}}}}{1} = 1$, $\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{1+e^{2k+\frac{2}{e^k}}}}{e^k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{e^{2k}}+e^{\frac{2}{e^k}}}}{1} = 1$

이므로 함수의 극한의 대소관계에 의해 $\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{1+e^c}}{e^k} = 1$ 이다.

(※)에서 $\lim_{k\to\infty} g(k) = \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{1+e^c}}{e^k}$ 이므로 $\lim_{k\to\infty} g(k) = 1$ 이다.

<2-3>

$F(2x) = \int_0^{2x} f(t)\,dt + C$ 라 하자.

$x \geq 0$ 일 때, $h(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)$ 라 하면

$$h'(x) = \frac{e^x}{2(\sqrt{1+e^x}-1)\sqrt{1+e^x}} - \frac{e^x}{2(\sqrt{1+e^x}+1)\sqrt{1+e^x}} > 0 \ (x>0) \text{ 이므로}$$

$h(x)$는 구간 $[0,\infty)$에서 증가함수이다.

$h(0) = \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = d$ 라 하고, $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$ 이므로

$x \geq 0 \Rightarrow d \leq h(x) \leq 0$ 이다.

∴3 $2\sqrt{1+e^x}+d \leq f(x) = 2\sqrt{1+e^x} + h(x) \leq 2\sqrt{1+e^x}$ 을 구간 $[0, 2t]$ $(t>0)$ 에서 정적분하면 $2(f(2t)-f(0)) + 2dt \leq \int_0^{2t} f(x)\,dx \leq 2(f(2t)-f(0))$ 이다.

양 변에 C를 더하고 e^t로 나누면

$$\frac{2(f(2t)-f(0))+2dt}{e^t} \leq \frac{F(2t)}{e^t} \leq \frac{2(f(2t)-f(0))}{e^t} \text{ 이다. (A)}$$

한편, $e^{\frac{x}{2}} \leq f'(x) \leq e^{\frac{x}{2}}+1$ 이므로 이 식을 구간 $[0, 2t]$ $(t>0)$ 에서 정적분하면 $2(e^t-1) \leq f(2t) - f(0) \leq 2e^t + 2t - 2$ 이다.

$\therefore \frac{2(e^t-1)}{e^t} \leq \frac{f(2t)-f(0)}{e^t} \leq \frac{2(e^t+t-1)}{e^t}$ 이다.

$\lim_{t\to\infty}\frac{2(e^t-1)}{e^t} = \lim_{t\to\infty}\frac{2(e^t+t-1)}{e^t} = 2$ 이므로 <각>에 의해

$\lim_{t\to\infty}\frac{f(2t)-f(0)}{e^t} = 2$ 이다. 이를 이용하면 (A)에서

$\lim_{t\to\infty}\frac{2(f(2t)-f(0))+2dt}{e^t} = \lim_{t\to\infty}\frac{2(f(2t)-f(0))}{e^t} = 4$ 이므로 (각)에 의해

$\lim_{t\to\infty}\frac{F(2t)}{e^t} = 4$ 이다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

2-1)

$f(x) = a\sqrt{1+e^x} + \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-b}{\sqrt{1+e^x}+b}\right)$

$f'(x) = \frac{ae^x}{2\sqrt{1+e^x}} + \frac{\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}}{\sqrt{1+e^x}-b} - \frac{\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}}{\sqrt{1+e^x}+b} = \sqrt{1+e^x}$

$\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\left(a + \frac{2b}{1+e^x-b^2}\right) = \sqrt{1+e^x}$

$e^x\left(a+\frac{2b}{e^x+1-b^2}\right) = 2e^x+2$

$a + \frac{2b}{e^x+1-b^2} = 2 + \frac{2}{e^x}$ 이므로

$a=2$, $b=1$ 임을 알 수 있다.

2-2)

$y=e^x$ 의 $(k \le x \le k+\frac{1}{e^k})$의 길이

$g(k) = \int_k^{k+\frac{1}{e^k}} \sqrt{1+e^{2x}}\,dx$ 다.

$(-\infty,\infty)$에서 $e^x \le \sqrt{1+e^{2x}} \le e^x+1$ 이므로

$\int_k^{k+\frac{1}{e^k}} e^x\,dx \le g(k) \le \int_k^{k+\frac{1}{e^k}} (e^x+1)\,dx$ 이다.

$\lim_{k\to\infty}(e^{k+\frac{1}{e^k}} - e^k) = \lim_{k\to\infty} e^k(e^{\frac{1}{e^k}}-1) = \lim_{k\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{e^k}}-1}{\frac{1}{e^k}} = 1$

이고, $\lim_{k\to\infty}\{(e^{k+\frac{1}{e^k}} - e^k) + \frac{1}{e^k}\} = 1+0=1$ 이므로 ↙ 앞서 했던거 같은 방법으로

샌드위치의 정리에 의해

$\lim_{k\to\infty} g(k) = 1$ 이다.

2-3)

$f(x) = 2\sqrt{1+e^x} + \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)$

$= 2\sqrt{1+e^x} + 2\ln(\sqrt{1+e^x}-1) - x$ 이다.

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 이므로 (a는 상수)

$t=2y$로 치환하면

$F(2x) = \int_a^{2x} f(t)\,dt = 2\int_a^x f(2y)\,dy$ 다.

$F(2x) = \int_a^x \{4\sqrt{1+e^{2t}} + 4\ln(\sqrt{1+e^{2t}}-1) - 2t\}\,dt$ 이다.

$1 \le \sqrt{1+e^{2t}} \le e^t+1$

$4e^t + 4\ln(1-1) - 2t \le 4\sqrt{1+e^{2t}} + 4\ln(\sqrt{1+e^{2t}}-1) - 2t$
$= 4e^t - 2t$

$\le 4e^t + 4 + 4\ln e^t - 2t = 4e^t+4+2t$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_a^x (4e^t-2t)\,dt}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{4e^x - x^2 - 4e^a + a^2}{e^x}$

$= 4$이고

$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_a^x (4e^t+4+2t)\,dt}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{4e^x+4x+x^2-a^2-4a-4e^a}{e^x}$

$= 4$이다.

↳ (추가설명) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0$ 이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\times\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{2x}} = 0\times 0$

따라서 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = 0$ 이다

(↳ $x=\frac{1}{2}t$ 대입 $\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{t^2}{4}}{e^t} = \frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^t} = 0$)

그러므로 샌드위치의 정리에 의해

따라서 $\lim_{x\to\infty}\frac{F(2x)}{e^x} = 4$ 이다.