한양대학교 2021학년도 신입학전형 수시

자 연 계	논 술 예 시 답 안	오후(1)-1번

1. 학생 B가 50번의 기회 중에 공을 친 횟수를 확률변수 Y라고 하자. 학생 B가 공을 칠 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(50,\frac{1}{3})$을 따른다. 이 때, $\frac{50}{3}, \frac{50\times 2}{3} > 5$이므로, 이항분포 $\mathrm{B}(50,\frac{1}{3})$는 근사적으로 정규분포 $N(\frac{50}{3},(\frac{10}{3})^2)$를 따른다.

$$\mathrm{P}(10 \le Y \le 20) = \mathrm{P}\left(\frac{10-\frac{50}{3}}{\frac{10}{3}} \le Z \le \frac{20-\frac{50}{3}}{\frac{10}{3}}\right) = \mathrm{P}(-2 \le Z \le 1)$$

$$= \mathrm{P}(-2 \le Z \le 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1) = \mathrm{P}(0 \le Z \le 2) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1) = 0.4772 + 0.3413 = 0.8185$$

2. 다섯 번의 차례를 통해 7점 이상을 얻을 때, 가능한 득점의 경우의 수와 각 경우의 확률을 구하면 오른쪽 표와 같다.

점수	득점	경우의 수	확률
10점	2, 2, 2, 2, 2	1	$(\frac{1}{6})^5$
9점	2, 2, 2, 2, 1	$\frac{5!}{4!1!}=5$	$(\frac{1}{6})^4(\frac{1}{3})$
8점	2, 2, 2, 2, 0	$\frac{5!}{4!1!}=5$	$(\frac{1}{6})^4(\frac{1}{2})$
	2, 2, 2, 1, 1	$\frac{5!}{3!2!}=10$	$(\frac{1}{6})^3(\frac{1}{3})^2$
7점	2, 2, 2, 1, 0	$\frac{5!}{3!1!1!}=20$	$(\frac{1}{6})^3(\frac{1}{3})(\frac{1}{2})$
	2, 2, 1, 1, 1	$\frac{5!}{2!3!}=10$	$(\frac{1}{6})^2(\frac{1}{3})^3$

따라서 구하고자 하는 확률은

$$1\times(\frac{1}{6})^5 + 5\times(\frac{1}{6})^4(\frac{1}{3}) + 5\times(\frac{1}{6})^4(\frac{1}{2})$$

$$+10\times(\frac{1}{6})^3(\frac{1}{3})^2 + 20\times(\frac{1}{6})^3(\frac{1}{3})(\frac{1}{2}) + 10\times(\frac{1}{6})^2(\frac{1}{3})^3$$

$$= \frac{1}{6^5}(1+10+15+40+120+80) = \frac{266}{6^5} = \frac{133}{3888}$$

이다.

3.
두 차례에 두 학생이 받을 수 있는 점수에 따른 경우의 수와 확률은 다음과 같다.

점수	득점	경우의 수	학생 A의 확률	학생 B의 확률
0	0, 0	1	$(\frac{1}{2})^2$	$(\frac{2}{3})^2$
1	0, 1	2	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{18}$
2	2, 0	2	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$
	1, 1	1	$(\frac{1}{3})^2$	$(\frac{1}{12})^2$
3	2, 1	2	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{48}$
4	2, 2	1	$(\frac{1}{6})^2$	$(\frac{1}{4})^2$

학생 B가 학생 A보다 높은 점수를 받기 위해서는 다음과 같이 득점을 하여야 한다.

학생 A의 득점	0				1			2		3
학생 B의 득점	1	2	3	4	2	3	4	3	4	4

$$(\text{학생 A가 0점일 확률})\times\left(\sum_{j=1}^{4}(\text{학생 B가 } j\text{점일 확률})\right) = (\frac{1}{2})^2\left(2\times\frac{1}{18}+2\times\frac{1}{6}+(\frac{1}{12})^2+2\times\frac{1}{48}+(\frac{1}{4})^2\right)$$

$$= (\frac{1}{2})^2\frac{(16+48+1+6+9)}{12^2} = \frac{80}{2^6\times 3^2} = \frac{5}{2^2\times 3^2}$$

$$(\text{학생 A가 1점일 확률})\times\left(\sum_{j=2}^{4}(\text{학생 B가 } j\text{점일 확률})\right) = (2\times\frac{1}{6})\left(2\times\frac{1}{6}+(\frac{1}{12})^2+2\times\frac{1}{48}+(\frac{1}{4})^2\right)$$

$$= (\frac{1}{3})\frac{(48+1+6+9)}{12^2} = \frac{64}{2^4\times 3^3} = \frac{2^2}{3^3}$$

$$(\text{학생 A가 2점일 확률})\times\left(\sum_{j=3}^{4}(\text{학생 B가 } j\text{점일 확률})\right) = \left(2\times\frac{1}{12}+(\frac{1}{3})^2\right)\left(2\times\frac{1}{48}+(\frac{1}{4})^2\right)$$

$$= (\frac{5}{18})\frac{(2+3)}{48} = \frac{25}{2^5\times 3^3} = \frac{5^2}{2^5\times 3^3}$$

$$(\text{학생 A가 3점일 확률})\times(\text{학생 B가 4점일 확률}) = (2\times\frac{1}{18})(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{2^4\times 3^2}$$

따라서 학생 B의 득점이 학생 A보다 클 확률은 $\frac{5}{2^2\times 3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{5^2}{2^5\times 3^3}+\frac{1}{2^4\times 3^2} = \frac{120+128+25+6}{2^5\times 3^3} = \frac{279}{2^5\times 3^3} = \frac{31}{2^5\times 3} = \frac{31}{96}$

한양대학교 2021학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

오후(1)-2번

1. 오른쪽 첫 번째 그림에서 $\angle \mathrm{DAQ}=t$, $\angle \mathrm{HAQ}=s$ 라 하면, $\angle \mathrm{BAP}=\frac{\pi}{4}-t$, $\angle \mathrm{HAP}=\frac{\pi}{4}-s$ 이다.

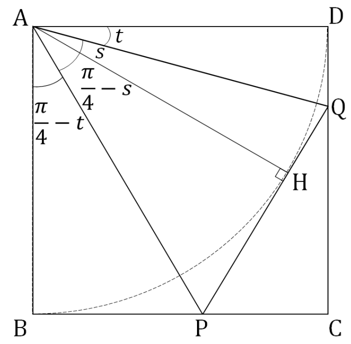
$$\frac{\cos s}{\cos t}=\overline{\mathrm{AH}}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-s\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}\cos s+\sin\frac{\pi}{4}\sin s}{\cos\frac{\pi}{4}\cos t+\sin\frac{\pi}{4}\sin t}=\frac{\cos s+\sin s}{\cos t+\sin t}$$

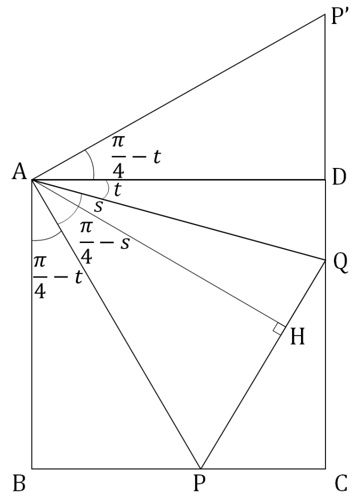
이고, 정리하면 $\tan t=\tan s$, 즉 $t=s$ 이므로

삼각형 DAQ 와 삼각형 HAQ 는 합동이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AD}}=1$ 이다.

따라서 점 H 가 이루는 곡선은 반지름 1 인 사분원 이므로 길이는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.





(다른 풀이)

오른쪽 두 번째 그림에서 삼각형 AQP 와 삼각형 AQP' 은 합동이고, 따라서

$\overline{\mathrm{AH}}=$(삼각형 AQP 의 높이)$=$(삼각형 AQP' 의 높이)$=\overline{\mathrm{AD}}=1$ 이다.

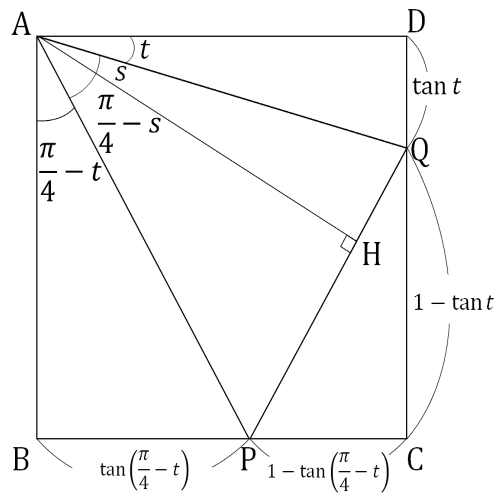
따라서 점 H가 이루는 곡선은 반지름이 1 인 사분원 이므로 길이는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

2. 오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(1-\tan t)^2+\left(1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)^2}=\frac{1+\tan^2 t}{1+\tan t}$ 이므로,

삼각형 PAQ 의 넓이 $f(t)$ 는 $f(t)=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AH}}\cdot\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\tan^2 t}{1+\tan t}$ 이다.

따라서 ($1+\tan t=s$로 치환해서)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2 t}{1+\tan t}dt=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{s}ds=\frac{1}{2}\ln 2\ (=\ln\sqrt{2})$$ 이다.



(다른 풀이)

삼각형 PAQ 의 넓이 $f(t)$ 는

$$f(t)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{AQ}}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}\frac{1}{\cos t}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{(\cos t+\sin t)\cos t}$$ 이다.

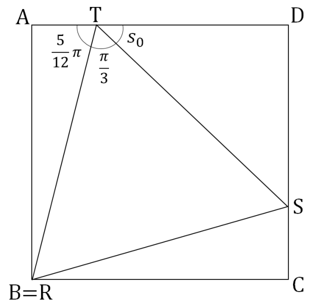
따라서 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\cos t+\sin t)\cos t}dt=\cdots=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2 t}{1+\tan t}dt=\cdots=\frac{1}{2}\ln 2\ (=\ln\sqrt{2})$$ 이다.

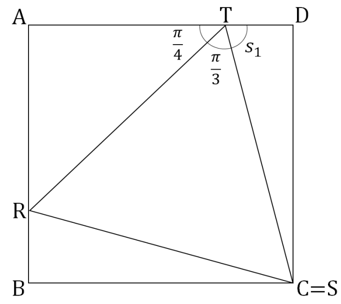
3. 오른쪽 그림에서 $s_0=\frac{\pi}{4}(=45^\circ)$, $s_1=\frac{5\pi}{12}(=75^\circ)$이다.

$\frac{\pi}{4}\le s\le\frac{5\pi}{12}$ 인 s 에 대해, 정삼각형 RST 의 한 변의 길이를 a 라고 하면,

오른쪽 아래 그림에서 $a\cos\left(\frac{2}{3}\pi-s\right)+a\cos s=1$ 임을 알 수 있고, 따라서

$$a=\frac{1}{\cos\left(\frac{2}{3}\pi-s\right)+\cos s}=\frac{1}{\cos\frac{2}{3}\pi\cos s+\sin\frac{2}{3}\pi\sin s+\cos s}=\frac{1}{\sin\left(s+\frac{\pi}{6}\right)}$$





이다. 정삼각형 RST 의 넓이 $g(s)$는

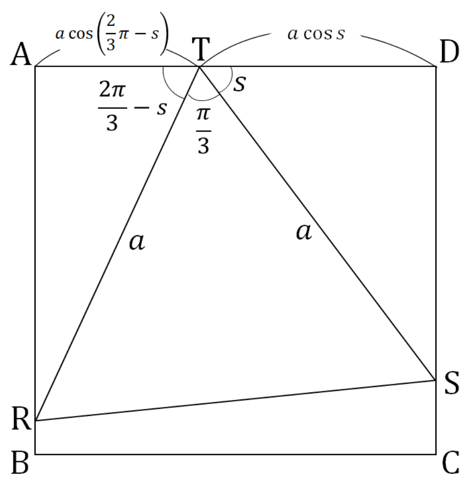
$$g(s)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\left(s+\frac{\pi}{6}\right)}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}\csc^2\left(s+\frac{\pi}{6}\right)$$ 이고,

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{12}}g(s)ds=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{12}}\csc^2\left(s+\frac{\pi}{6}\right)ds \quad \leftarrow t=s+\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{\frac{5\pi}{12}}^{\frac{7\pi}{12}}\csc^2 t\,dt=-\frac{\sqrt{3}}{4}\cot t\Big|_{\frac{5\pi}{12}}^{\frac{7\pi}{12}}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)$$

$$=\sqrt{3}-\frac{3}{2}$$



한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:020301)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. B가 야구방망이로 휘두르는 시행을 한 번 공을 칠 확률은

$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 학생 B가 야구방망이로 휘두르는 시행을 50번 반복했을때 이항분포 $(50, \frac{1}{3})$을 따른다. 이를 정규분포로 근사시키면

$N(\frac{50}{3}, (\frac{10}{3})^2)$ 이므로 공을 친 횟수가 10 이상이고 20이하일

확률은 $P\left(\frac{10-\frac{50}{3}}{\frac{10}{3}} \le Z \le \frac{20-\frac{50}{3}}{\frac{10}{3}}\right) = P(-2 \le Z \le 1)$

이고 <나>의 표준정규분포 표에 따르면 0.8185 이다.

$\therefore$ 0.8185

2. A가 야구방망이로 휘두르는 시행을 5번 할때 얻을 수 있는 점수는 매시행마다 0점, 1점, 2점 중 하나이다.

i) A가 시행 5번 후 얻은 점수의 합이 7점인 경우

① $1+1+1+2+2=7$

$\frac{5!}{3!2!}\times(\frac{1}{6})^2\times(\frac{1}{3})^3 = \frac{10\times8}{6^5}$

② $0+2+2+2+1=7$

$\frac{5!}{3!}\times(\frac{1}{6})^3\times(\frac{1}{3})\times(\frac{1}{2}) = \frac{20\times6}{6^5}$

ii) A가 시행 5번 후 얻은 점수의 합이 8점인 경우

① $2+2+2+2+0=8$

$\frac{5!}{4!}\times(\frac{1}{6})^4\times(\frac{1}{2}) = \frac{5\times3}{6^5}$

② $2+2+2+1+1=8$

$\frac{5!}{3!2!}\times(\frac{1}{6})^3\times(\frac{1}{3})^2 = \frac{10\times4}{6^5}$

iii) A가 시행 5번 후 얻은 점수의 합이 9점인 경우

① 2 2 2 2 1

$\frac{5!}{4!}\times(\frac{1}{6})^4\times(\frac{1}{3}) = \frac{5\times2}{6^5}$

iv) A가 시행 5번 후 얻은 점수의 합이 10점인 경우

① $2+2+2+2+2=10$

$1\times(\frac{1}{6})^5 = \frac{1}{6^5}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{266}{6^5}$ 이다

$\therefore \frac{266}{6^5}$

3. A와 B가 야구방망이로 휘두르는 시행을 각각 2번 했을때 학생 B가 학생 A보다 높은 점수를 얻을 확률은 다음 경우에 따른 확률의 값을 모두 더한 값이다

A가 2회 시행 반복시 얻은 점수	B가 2회 시행 반복시 얻은 점수
i) 0	1 or 2 or 3 or 4
ii) 1	2 or 3 or 4
iii) 2	3 or 4
iv) 3	4

i) $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}) = \frac{1}{4}\times\frac{5}{9} = \frac{5}{36}$

ii) $2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times(1-(\frac{4}{9}+\frac{1}{12}\times\frac{2}{3}\times2)) = \frac{1}{3}\times\frac{4}{9}$

iii) $(2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3})\times(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{12}) = \frac{5}{18}\times\frac{5}{48}$

iv) $(2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3})\times(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}) = \frac{1}{9}\times\frac{1}{16}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{5\times8\times3+4\times32+25+2\times3}{2^5\times3^3}$

$= \frac{31}{2^5\times3} = \frac{31}{96}$ 이다

$\therefore \frac{31}{96}$

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:020301)	

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 학생 B가 공을 칠 확률 : $1-$ (B가 공을 치지 못할 확률)

$= 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ 이다.

공을 친 횟수를 A라고 하면 50회 시행시 A의 값은

이항분포 $B(50, \frac{1}{3})$을 따른다

$\therefore E(A) = 50\times\frac{1}{3} = \frac{50}{3},\ V(A) = 50\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{100}{9}$

분산 $V(A) = \frac{100}{9}$ 이므로 $\sigma(A) = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$ 이다.

따라서 정규분포 $\left(\frac{50}{3}, \left(\frac{10}{3}\right)^2\right)$을 따른다.

10 이상 20이하일 확률을 표준화하면

$P\left(\frac{10-\frac{50}{3}}{\frac{10}{3}} \le Z \le \frac{20-\frac{50}{3}}{\frac{10}{3}}\right) = P(-2\le Z\le 1)$

$= P(-2\le Z\le 0) + P(0\le Z\le 1) = P(0\le Z\le 2) + P(0\le Z\le 1)$

$= 0.4772 + 0.3413 = 0.8185$

2.

i) 못친 경우가 있을 때

		확률
획득점수 :	2, 2, 2, 2, 0	$(\frac{1}{6})^4\times(\frac{1}{2})\times5$
	2, 2, 2, 1, 0	$(\frac{1}{6})^3\times(\frac{1}{3})\times(\frac{1}{2})\times20$

(0이 2개이상 ⇒ 점수총합<6)

ii) 못친 경우가 없을 때

획득점수 :	2, 2, 2, 2, 2	$(\frac{1}{6})^5\times1$
	2, 2, 2, 2, 1	$(\frac{1}{6})^4\times(\frac{1}{3})\times5$
	2, 2, 2, 1, 1	$(\frac{1}{6})^3\times(\frac{1}{3})^2\times10$
	2, 2, 1, 1, 1	$(\frac{1}{6})^2\times(\frac{1}{3})^3\times10$

$\therefore$ 7점 이상일 확률 $= (\frac{1}{6})^4\times(\frac{1}{2})\times5 + (\frac{1}{6})^3\times(\frac{1}{3})\times(\frac{1}{2})\times20 + (\frac{1}{6})^5$

$+ (\frac{1}{6})^4\times(\frac{1}{3})\times5 + (\frac{1}{6})^3\times(\frac{1}{3})^2\times10 + (\frac{1}{6})^2\times(\frac{1}{3})^3\times10$

$= \frac{266}{6^7} = \frac{133}{3888}$

3.

i) B가 4점

B가 4점일 확률 A가 4점이 아닐확률

$(\frac{1}{4})^2 \times \{1-(\frac{1}{6})^2\} = \frac{35}{576}$

ii) B가 3점

B가 3점일 확률 A가 ~~3~~ 4점이 아닐확률

$2\times(\frac{1}{4})\times(\frac{1}{12}) \times \{1-(\frac{1}{6})^2-2\times(\frac{1}{6})\times(\frac{1}{3})\} = \frac{31}{864}$

iii) B가 2점

B가 2점일확률 A가 0, 1 점일확률

$\{2\times(\frac{1}{4})\times(\frac{2}{3})+(\frac{1}{12})^2\} \times \{(\frac{1}{2})^2+2\times(\frac{1}{3})\times(\frac{1}{2})\} = \frac{7^3}{12^3}$

iv) B가 1점

B가 1점일 확률 A가 0점

$2\times(\frac{1}{12})\times(\frac{2}{3}) \times (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{36}$

B의 점수가 A보다 높을 확률 : $\frac{35}{576}+\frac{31}{864}+\frac{343}{12^3}+\frac{1}{36}$

$= \frac{105+62+343+48}{12^3} = \frac{558}{12^3}$

$= \frac{31}{96}$