한양대학교 2021학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	오후(1)-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 오후1 - 1번 문제는 고등학교 수학교과과정 중 확률과 통계의 주요내용을 바탕으로 출제하였다. 다음과 같이 3개의 소문항을 통해서, 이항분포와 표준정규분포의 관계, 경우의 수, 같은 것이 있는 순열, 확률 등의 내용을 종합적으로 이해하여 해결할 수 있는지를 묻고 있다. 특히, 확률과 통계의 개념을 정확히 이해하고 수학적 사고력을 바탕으로 논리적으로 문제를 해결할 수 있는 능력을 측정하는데 주안점을 두고 출제를 하였다.

문항 1. 충분히 큰 시행에 대하여 이항분포가 근사적으로 정규분포를 다른다는 점을 활용하고, 표준화를 통하여 확률을 묻는 문제이다.

문항 2. 시행을 반복하였을 때 나올 수 있는 득점의 방법과 그 경우의 수를 구하고, 각각의 경우에 확률을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다.

문항 3. 각 학생이 얻어야 하는 점수와 그 점수를 얻기 위한 득점의 방법을 빠짐없이 파악하고, 득점을 얻는 경우의 수와 그 확률을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	20	이항분포로부터 근사적으로 정규분포를 이끌어냈는가?	10
		표준화와 표준정규분포표를 통해 문제를 해결하였는가?	10
2	40	득점에 따른 경우의 수를 정확히 파악했는가?	20
		각 경우의 확률을 통해 구하고자 하는 확률을 정확히 구했는가?	20
3	40	두 학생이 받아야 하는 점수에 대한 경우의 수를 정확히 파악했는가?	20
		각 경우의 확률을 통해 구하고자 하는 확률을 정확히 구했는가?	20

3. 출제 근거

고등학교 확률과 통계, 좋은책 신사고 (고성은 외), 2019, p.50~p.56
고등학교 확률과 통계, 비상교육 (김원경 외), 2019, p.53~p.63
고등학교 확률과 통계, 미래엔 (황선욱 외), 2019, p.103~p.104

한양대학교 2021학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	출제 의도 및 평가 지침	오후(1)-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 오후(1)-2번 문제는 고교수학과정 중 “미적분-미분법-여러 가지 함수의 미분” 단원의 삼각함수의 덧셈정리와 “미적분-적분법-여러 가지 적분법” 단원의 치환적분법을 주요 내용으로 하고 있다. 도형의 성질을 잘 이해하고 활용하기 위한 중요한 도구의 하나인 삼각함수의 덧셈정리 및 관련 지식을 적절히 활용해서 평면도형이 갖고 있는 성질들을 분석하고, 정확한 논증을 통해 원하는 결과를 도출할 수 있는지를 묻고 있다. 다음 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

문항 2-1은 특정 조건을 만족하는 삼각형이 갖는 고유의 성질을 이끌어낼 줄 아는지를 묻는 문제이다.
문항 2-2는 삼각함수의 덧셈정리 등을 이용하여 주어진 삼각형에 대한 필요한 정보를 이끌어 내고 치환적분 등의 기술을 적절히 활용할 줄 아는지를 묻는 문제이다.
문항 2-3은 정사각형에 내접하는 정삼각형이 만족해야 하는 고유의 성질을 이해하고 치환적분 등의 기술을 적절히 활용할 줄 아는지를 묻는 문제이다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	삼각형 PAQ의 밑변 PQ에 대한 높이 AH를 구했는가?	20
		수선의 발 H가 이루는 곡선의 길이를 구했는가?	10
2	30	삼각형 PAQ의 넓이를 각의 크기 t에 대한 식 $f(t)$로 표현했는가?	20
		정적분 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt$를 구했는가?	10
3	40	각의 크기 s의 최솟값 s_0와 최댓값 s_1을 구했는가?	10
		삼각형 RST의 넓이를 각의 크기 s에 대한 식 $g(s)$로 표현했는가?	20
		정적분 $\displaystyle\int_{s_0}^{s_1} g(s)\,ds$를 구했는가?	10

3. 출제 근거

이 문제는 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 교과서 미적분의 주요내용을 다루고 있다. 3개의 소문항은 교과서의 내용과 다음과 같이 연계되며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용만으로 구성되어 있다.

교과서 미적분 (미래엔 황선욱 외 8인) : 미분법 - 여러 가지 함수의 미분 - 삼각함수의 덧셈정리
교과서 미적분 (좋은책신사고 고성은 외 5인) : 적분법 - 여러 가지 적분법 - 치환적분법

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. B를 원점, 직선 AB를 y축, 직선 BC를 x축이라하면

P의 좌표는 $\left(\frac{1-\tan t}{1+\tan t}, 0\right)$이고 Q의 좌표는 $(1, 1-\tan t)$이다.

이를 이용하면 직선 PQ는 $y = \frac{1-\tan^2 t}{2\tan t}(x-1) - \tan t + 1$ 이고

직선 AH는 $y = \frac{-2\tan t}{1-\tan^2 t}x + 1$로 얻을 수 있다

두 직선의 교점은 H이고 따라서 H의 좌표는 $\left(\frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t}, 1 - \frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}\right)$

이때 H의 x좌표를 X, y좌표를 Y라 하면

$X^2 + (Y-1)^2 = 1$ $(0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq 1)$을 만족한다

$\therefore 2\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$

2. $\triangle PAQ$의 넓이는 선분 AH와 선분 PQ의 곱이라고 할 수 있다.

이때 선분 AH의 길이가 1이므로 (문제 2-1) $\triangle PAQ$의 넓이는 $\frac{1}{2}\overline{PQ}$.

따라서 $\frac{1}{2}\overline{PQ}$를 구해보면

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1-\tan t}{1+\tan t} - 1\right)^2 + (\tan t - 1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\tan^2 t + 1 - 2\tan^2 t + \tan^4 t}{(1+\tan t)^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\tan^2 t}{1+\tan t}$$

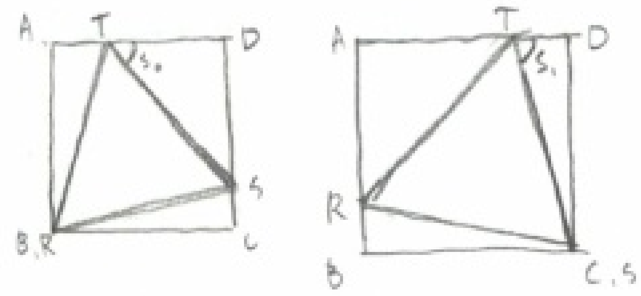
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} A(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\tan^2 t}{1+\tan t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 t}{1+\tan t}\,dt$$

$1 + \tan t = x$라 하면 $\sec^2 t\,dt = dx$ 이므로 이를 대입하면

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 t}{1+\tan t}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}[\ln x]_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2$$

$\therefore \frac{1}{2}\ln 2$

3.



i) s_0

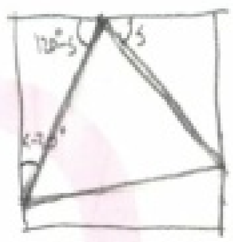
$\triangle DTS$는 직각이등변삼각형이므로 $s_0 = 45° = \frac{\pi}{4}$

ii) s_1

$\triangle ART$는 직각이등변삼각형이므로 $\angle ATR = 45°$,

$\triangle RST$는 정삼각형이므로 $\angle RTS = 60°$

따라서 $s_1 = 180° - 45° - 60° = 75° = \frac{5}{12}\pi$



$\triangle RST$의 한변의 길이를 a라 하면

$\overline{AD} = a\sin(s - \frac{\pi}{6}) + a\cos s$

$= a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin s - \frac{1}{2}\cos s\right) + a\cos s$

$= a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin s + \frac{1}{2}\cos s\right) = a\sin(s + \frac{\pi}{6})$

$\overline{AD} = 1$이므로 $a = \frac{1}{\sin(s+\frac{\pi}{6})}$이다

이때 $\triangle RST$의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이므로 $g(s) = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{\sin^2(s+\frac{\pi}{6})}$

$$\int_{s_0}^{s_1} g(s)\,ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{12}\pi} \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{\sin^2(s+\frac{\pi}{6})}\,ds$$

$s + \frac{\pi}{6} = t$라 하면

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{12}\pi} \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{\sin^2(s+\frac{\pi}{6})}\,ds = \int_{\frac{5}{12}\pi}^{\frac{7}{12}\pi} \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{\sin^2 t}\,dt = \frac{\sqrt{3}}{4}[-\cot t]_{\frac{5}{12}\pi}^{\frac{7}{12}\pi}$$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\cot\frac{7}{12}\pi + \cot\frac{5}{12}\pi\right)$이다.

이므로 $\cot\frac{5}{12}\pi = 2-\sqrt{3}$ 이다

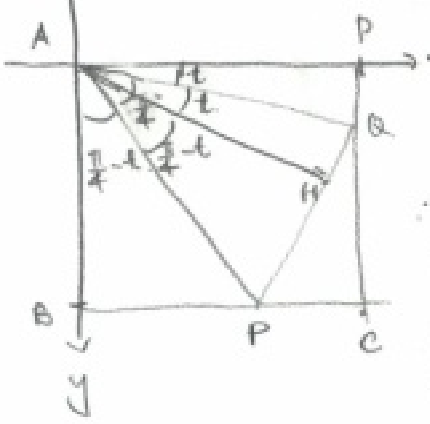
따라서 $\cot\frac{5}{12}\pi = 2-\sqrt{3}$, $\cot\frac{7}{12}\pi = -\cot\left(\frac{5}{12}\pi\right)$ 이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\cot\frac{7}{12}\pi + \cot\frac{5}{12}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2(2-\sqrt{3}) = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$

$\therefore \sqrt{3} - \frac{3}{2}$

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

[2-1] $\triangle AHQ$, $\triangle ADQ$가 합동이고, $\triangle ABP$, $\triangle APH$가 합동이므로 $\overline{AH}=1$이다.



좌표평면에 위와 같이 □ABCD를 대응시키면 다음과 같다.

$\angle QAP = \angle QAH$이므로

H의 x좌표는 $\cos(2t)$이고 ∴ $x=\cos 2t$이고

H의 y좌표는 $-\sin(2t)$이고 $y=-\sin 2t$이므로

의 매개변수로 생각한다.

∴ t가 0부터 $\frac{\pi}{4}$까지 변함에 따라

H가 움직이는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(-2\sin 2t)^2+(-2\cos 2t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{4}\,dt = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$ 이다.

[2-2] $\overline{AH}=1$이고 $\overline{QH}=\tan t$, $\overline{PH}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)$이므로

$f(t)=\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times(\overline{QH}+\overline{PH})=\frac{1}{2}\times 1\times\left(\tan t+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)$이다.

따라서 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\tan t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t\,dt$ 이다. $\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\tan t\,dt\right)$

따라서 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos t}\,dt$ 이고, $\cos t = x$로 치환하면 $-\sin t\,dt = dx$ 이므로

$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ 이다. ∴ $\left[\ln x\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = \ln 1 - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=-\ln\sqrt{2}+\ln 2$

$=\boxed{\frac{1}{2}\ln 2}$ 이다.

[3] 각 s가 최소일 때는 R이 B점에 있을 때 이므로 각 $s=\frac{\pi}{4}$ 이다.

각 s가 최대일 때는 점 S가 C에 있을 때 이므로 각 $s=\frac{5}{12}\pi$ 이다.

$\triangle RST$의 넓이를 구하기 위해 R에서 $\overline{CD}$로 수선을 긋고 그 점을 H라 하면 $\angle SRH=\frac{\pi}{3}-s$이다.

∴ $\overline{RS}=\overline{RH}\times\sec\left(\frac{\pi}{3}-s\right)$이고 $\overline{RH}=\overline{BC}=1$이므로

$\overline{RS}=\sec\left(\frac{\pi}{3}-s\right)$이다.

∴ $\triangle RST$의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times\sec^2\left(\frac{\pi}{3}-s\right)$ 이다.

$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\sqrt{3}}{4}\sec^2\left(\frac{\pi}{3}-s\right)ds$ 에서 $s_1=\frac{5\pi}{12}$, $s_0=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{12}} \sec^2\left(\frac{\pi}{3}-s\right)ds$ 이다. $\frac{\pi}{3}-s=\theta$로 치환하면 $-ds=d\theta$이고

$\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{12}} \sec^2\theta\,d\theta$ 이다.

∴ $\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\tan\theta\right]_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\tan\frac{\pi}{12}-\tan\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 이고

$\tan\frac{\pi}{12}$는 $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{2\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{\pi}{12}}$ 로 계산하면 $2-\sqrt{3}$이다. 따라서 구하는 값은

$\boxed{\sqrt{3}-\frac{3}{2}}$ 이다.