한양대학교 2021학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

의예과-2번

1. 직선 l에 접하는 두 원의 반지름이 a, b라고 할 때,
이 두 원에 접하고 l에 접하는 원의 반지름 r을 구하면

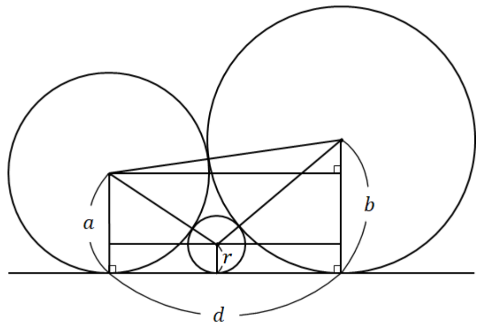
$(a+b)^2 = (a-b)^2 + d^2$

이므로 $d = 2\sqrt{ab}$ 이고,

$$d = \sqrt{(a+b)^2-(a-r)^2} + \sqrt{(b+r)^2-(b-r)^2} = 2\sqrt{ab}$$

에서

$$\sqrt{r} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}} \cdots (\star)$$



이제 원 C, D에서 시작하여 $C_1, C_2, \ldots$ 의 각각의 반지름 $r_1, r_2, \ldots$를 생각할 때 $c_n = \frac{1}{\sqrt{r_n}}$으로 정의하고 $(\star)$를 이용하여 c_n을 계산하자.

원 C_n이 직선 l과 원 C_k, C_m에 접하므로

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}} = \frac{1}{\sqrt{r_k}} + \frac{1}{\sqrt{r_m}} = c_n = c_k + c_m$$

A의 영역 중 가장 큰 원부터 채워 넣어야 하므로 c_n이 작은 순서대로 위 계산을 반복해 주면 된다. 다음은 위에서 설명한 과정을 그림으로 나타낸 것이다.

따라서 $c_{12} = c_{13} = c_{14} = c_{15} = 7$이므로, $r_{12} = \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$이다

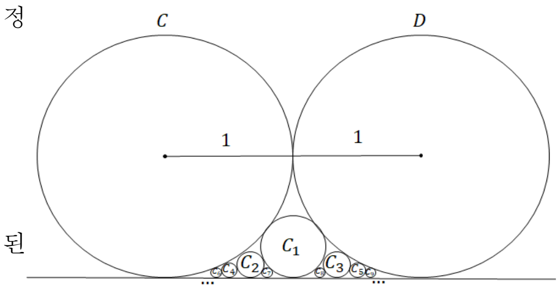


그림 1 원 C_n을 생성하는 과정

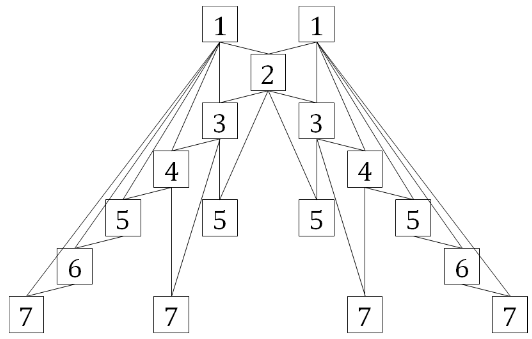


그림 2 c_n을 구하는 과정

2. 제시문 <나>에 의하여 구간 $(0,\infty)$에서 $f'(x) < 0$이므로 $f(x)$는 감소한다. 따라서 $f(x)$는 일대일 함수이다. $u = f(x)$로 치환하면

$$a_n = \int_{\frac{1}{n}}^{2021n} f(x)\,dx = \int_{f(\frac{1}{n})}^{f(2021n)} u \frac{du}{f'(x)}$$

$$= -\int_{f(\frac{1}{n})}^{f(2021n)} u \frac{du}{f(x)\sqrt{2-f(x)}}$$

$$= -\int_{f(\frac{1}{n})}^{f(2021n)} \frac{du}{\sqrt{2-u}} = 2\left[\sqrt{2-u}\,\right]_{f(\frac{1}{n})}^{f(2021n)}$$

$$= 2\left(\sqrt{2-f(2021n)} - \sqrt{2-f(\frac{1}{n})}\right)$$

가정에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2-f(\frac{1}{n})} = \sqrt{2-\lim_{t\to 0+} f(t)} = 0$$

이고, 구간 $(0,\infty)$에서 함수 $f(x)$는 $0 < f(x) < 2$이고 감소하므로 함수 $\sqrt{2-f(x)}$는 $0 < \sqrt{2-f(x)} < \sqrt{2}$이고 증가한다.

자연수 n에 대하여 $c_n = \int_1^n \sqrt{2-f(x)}\,dx$라 하면,

$$c_n \geq \int_1^n \sqrt{2-f(1)}\,dx = \sqrt{2-f(1)}\,(n-1).$$

한편

$$c_n = -\int_1^n \frac{f'(x)}{f(x)}dx = -\left[\ln f(x)\right]_1^n = -(\ln f(n) - \ln f(1)),$$

즉 $\ln f(n) - \ln f(1) \leq -\sqrt{2-f(1)}\,(n-1)$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\ln f(n) = -\infty \text{ 또는 } \lim_{n\to\infty} f(2021n) = \lim_{n\to\infty} f(n) = 0.$$

그러므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 2\lim_{n\to\infty}\sqrt{2-f(2021n)} = 2\sqrt{2}$

3. <해 1> 이항정리에 의하여

$$b_n=\int_0^1 e^{-(n+2)x}\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k e^{(n-k)x}\,dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\int_0^1 e^{-(k+2)x}\,dx \quad (t=e^{-x}\text{ 으로 치환})$$

$$=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\int_{e^{-1}}^1 t^{k+1}dt=\int_{e^{-1}}^1 t(t+1)^n dt$$

한편, 부분적분법에 의하여

$$\int_{e^{-1}}^1 t(t+1)^n dt=\left[\frac{t(t+1)^{n+1}}{n+1}\right]_{e^{-1}}^1-\frac{1}{n+1}\int_{e^{-1}}^1 (t+1)^{n+1}dt$$

$$=\frac{2^{n+1}-e^{-1}(1+e^{-1})^{n+1}}{n+1}-\frac{2^{n+2}-(1+e^{-1})^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

따라서

$$\frac{n}{2^n}b_n=\frac{2n}{n+1}-\frac{e^{-1}(1+e^{-1})n}{n+1}\left(\frac{1+e^{-1}}{2}\right)^n$$

$$-\frac{4n}{(n+1)(n+2)}+\frac{(1+e^{-1})^2 n}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{1+e^{-1}}{2}\right)^n \quad \cdots (\bigstar\bigstar)$$

제시문 <다>에 의하여 $\frac{1+e^{-1}}{2}\in(0,1)$ 이므로, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+e^{-1}}{2}\right)^n=0$

그러므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}b_n=2$

<해 2> $\frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}(1+e^{-x})^{n+1}=-e^{-x}(1+e^{-x})^n$

$b_n=\int_0^1 e^{-x}\cdot e^{-x}(1+e^{-x})^n\,dx$ 라 쓰고 부분적분법을 사용하면

$$b_n=\left[-\frac{1}{n+1}e^{-x}(1+e^{-x})^{n+1}\right]_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1 e^{-x}(1+e^{-x})^{n+1}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{n+1}e^{-x}(1+e^{-x})^{n+1}\right]_0^1+\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}(1+e^{-x})^{n+2}\right]_0^1$$

이로부터 $(\bigstar\bigstar)$를 얻는다.

한양대학교

답안지 (의예과)

답안지 바코드

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:020301)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

(가)의 핵심 내용은 '감정 표현의 선험성 가설'이라 정리할 수 있다. 제시문 (가)에서 다윈이 감정 표현의 행위가 인류가 생존하는데 있어 큰 역할을 했고, 그로 인해 모든 인간이 얼굴에서 드러나는 감정 표현의 의미를 선험적으로 이해하고 활용할 수 있게 진화했다고 주장했기 때문이다. 하지만 (나)의 실험 결과는 서로 다른 고립된 문화에서 감정 표현에 대한 인식이 다르게 나타나며 제시문 (가)의 내용을 부정하고 있다 이로부터 (가)의 다윈이 잘못된 결론에 이르게 된 것은 자신이 속한 문화, 즉 유럽에서의 정우를 인류 전체의 범위로 확대하여 해석했기 때문임을 알 수 있다. 이를 과학 철학에서는 '성급한 일반화의 오류'를 범했다고 이야기한다. 제시문 (다)에서도 마찬가지로 심근경색 환자들의 증상 관련 표본 수집에서 체계적이지 못한 정보 처리로 인해 남녀 사이의 차이를 파악하지 못하는 '성급한 일반화의 오류'의 사례가 제시된다. 의학에서 모든 치료는 정확한 진단을 바탕으로 이루어져야 한다. 또한 정확한 증상의 파악이 이루어지지 않으면 정확한 진단도 있을 수 없기 때문에 제시문 (다)는 의학 데이터 분석이 정확하지 못한 경우에 대한 경각심을 일으키고 이를 바탕으로 앞으로의 의학에서 더욱 주의 깊은 데이터 분석을 해야 함을 일깨우는 것이다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

한양대학교

답안지 (의예과)

답안지 바코드

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:020301)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

'표정의 진화적 적응 가설'. 다윈의 주장에 따르면 인류가 얼굴로 감정을 표현하는 것은 부산물이나 우연이 아닌 생존에 중요한 일이었기 때문이다.

이, 주장의 기본 전제는 인간이 표현한 감정을 보편적으로 인식할 수 있어야 한다는 것이다. 물론 생물학적 설명인 적응으로 위의 주장을 설명할 수 있지만, (나)에 따르면 인간의 감정 인식 능력이 보편적이지 않음을 확인할 수 있다. 특히 아드리드 고등학생들 거의 모두가 일관된 판단을 했다는 사실을 주목해야 한다. (가)에서 와리악 족에 제시된 주장에 보편적인 것처럼 보여도 사실은 특수한 경우일 수 있음 또는 보편과 특수를 구별하기 힘들다는 사실을 의미한다. (나)의 아시막 족에 특정 사례가 예외적인 경우가 아님은 특히 다윈의 주장을 일반화하기 어렵다는 사실을 강화한다.

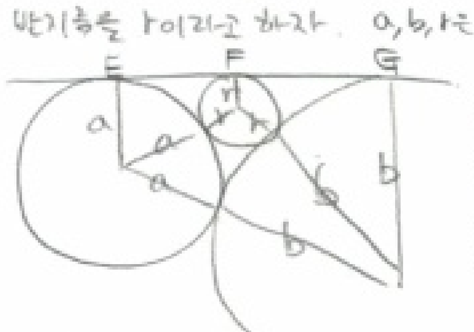
(다)의 경우도 위의 관점으로 분석할 수 있다. 남성 위주의 데이터 수집을 근거로 한 사실이라고 알려진 주장이 (나)의 2가지 사례처럼 여성 한자라는 반례에 의해 부정될 수 있는 것이다. 이는 흔히 보편적이라고 알거나 인식되는 것들이 의심 가능하다는 것을 시사하며, 절대적 진리가 허구적일 수 있음을 의미한다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

이 줄 위에 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 반지름이 a 인 원과 b인 원에 각각 접하고 두 원이 공통접선에 접하는 원의 반지름을 r이라고 하자. a, b, r은 다음을 만족한다.



$\overline{EF} = \sqrt{4ar}$

$\overline{FG} = \sqrt{4br}$

$\overline{EG} = \sqrt{4ab}$

$\overline{EF} + \overline{FG} = \overline{EG}$

$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{r}}$ 이 성립한다.

어떤 원에 대하여 그 원의 반지름이 r일때 $\frac{1}{\sqrt{r}} = f(\text{원})$ 이라 하자.

$f(\text{원})$이 클수록 반지름이 작아진다.

직선에 상에서 접하는 점이 가장 가까운 두 원에 대해서 사이에 두 원에 접하고 직선에 접하는 원을 만드는 시행을 생각하자

처음상황에서 원들의 f값을 순서대로 나열하면 다음과 같다.

$\left(\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{1}}\right)$

시행을 해주면 다음과 같다.

$(1, 2, 1)$

연속한 두 f값 사이에 그 두 값을 더한 f값이 추가된다.
해당 시행을 반복하면 다음과 같다.

$(1, 3, 2, 3, 1)$

$(1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1)$

$(1, 5, 4, 7, 3, 8, 5, 7, 2, 7, 5, 8, 3, 7, 4, 5, 1)$

$(1, 6, 5, 9, 4, 11, 7, 10, 3, 11, 8, 13, 5, 12, 7, 9, 2, 9, 7, 12, 5, 13, 8, 11, 3, 10, 7, 11, 4, 9, 5, 6, 1)$

f값의 개수는 다음과 같다.

f값	1	2	3	4	5	6	7	...
개수	2	1	2	2	4	2	6	...

$C_1 \sim C_{11}$

f값을 오름순으로 보았을 때 12번째 에는 $f(C_{12}) = 7$ 이 된다.

따라서 C_{12}의 반지름은 $\frac{1}{49}$이다.

2.

$f(x) = -\frac{f'(x)}{\sqrt{2-f(x)}}$

$f(x) = t$

$f'(x)dx = dt$

$a_n = \int_{\frac{1}{n}}^{2021n} f(x)dx = \int_{\frac{1}{n}}^{2021n} -\frac{f'(x)}{\sqrt{2-f(x)}}dx$

$= \int_{f(\frac{1}{n})}^{f(2021n)} -\frac{1}{\sqrt{2-t}}dt$

$a_n = \left[2\sqrt{2-t}\right]_{f(\frac{1}{n})}^{f(2021n)}$

$= 2\sqrt{2-f(2021n)} - 2\sqrt{2-f(\frac{1}{n})}$

$f(x)$는 연속함수이다.

$f'(x) = -f(x)\sqrt{2-f(x)} \quad (0 < f(x) < 2)$

< 0

$f(x)$는 감소함수이다.

$f(x)$는 연속인 감소함수이고 아래로 유계이다

단조수렴정리에 의해 $\lim_{x\to\infty} f(x)$가 존재한다.

x가 충분히 큰 상태에서 $f(x)$는 수렴하므로 $f'(x)$는 0에 수렴한다.

따라서 $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} (-f(x)\sqrt{2-f(x)}) = 0$ 이다.

$\lim_{x\to\infty} f(x)$ 를 α라하면

$\alpha\sqrt{2-\alpha} = 0$ 이다.

따라서 $\alpha = 0$이다.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(2\sqrt{2-f(2021n)} - 2\sqrt{2-f(\frac{1}{n})}\right)$

$= 2\sqrt{2-0} - 2\sqrt{2-2}$

$= 2\sqrt{2}$

3.

$e^{-x}+1 = t$

$dx(-e^{-x}) = dt$

$b_n = \int_{2}^{1+\frac{1}{e}} e^{-(n+2)x}(e^x t)^n(-e^x)dt$

$= \int_{2}^{1+\frac{1}{e}} t^n \times -e^{-x}dt$

$= \int_{2}^{1+\frac{1}{e}} t^n(1-t)\,dt$

$= \int_{1+\frac{1}{e}}^{2} (t^{n+1} - t^n)dt$

$= \frac{1}{n+2} \times \left(2^{n+2} - (1+\frac{1}{e})^{n+2}\right) - \frac{1}{n+1} \times \left(2^{n+1} - (1+\frac{1}{e})^{n+1}\right)$

$= \left(\frac{4}{n+2} - \frac{2}{n+1}\right)2^n - (1+\frac{1}{e})^{n+1} \times \left(\frac{1+\frac{1}{e}}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= \frac{2n}{(n+1)(n+2)} \times 2^n - (1+\frac{1}{e})^{n+1} \times \left(\frac{1+\frac{1}{e}}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n} \times \frac{2n^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2^n} \times (1+\frac{1}{e})^{n+1} \times \left(\frac{n}{n+2}(1+\frac{1}{e}) - \frac{n}{n+1}\right)$

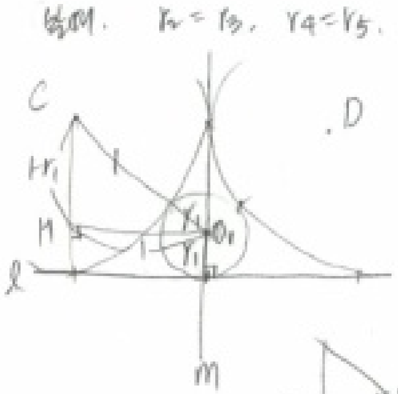
$= 1 \times 2 - 0 \times (1+\frac{1}{e} - 1) = 2$

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

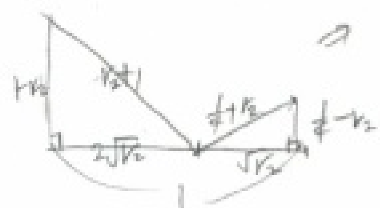
1. C와 D의 $\underbrace{\text{공통접선}(m)}_{l\text{에 수직인}}$ 에 대하여 양쪽이 대칭이다

C_1은 C, D, l에 모두 접하는 원이고, C_n의 반지름을 r_n이라 놓자. $r_2=r_3$, $r_4=r_5$, $r_6=r_7$, $r_8=r_9$, $r_{10}=r_{11}$, $r_{12}=r_{13}$ 이다



C_1의 중심 O_1,
CHO_1에서 $(1+r_1)^2 = 1+(1-r_1)^2 \rightarrow r_1 = \frac{1}{4}$

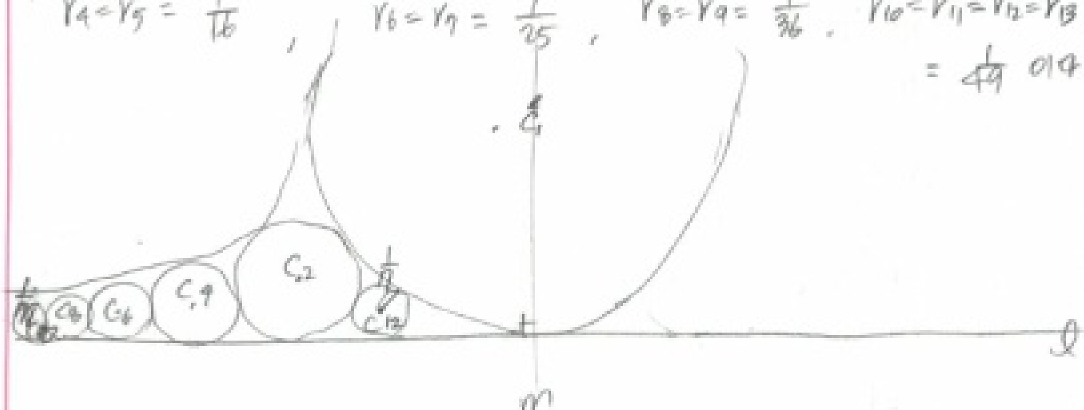
C_2는 C, C_1, l에 동시에 접하는 원이고,
C_3은 m에 대해 C_2와 대칭이다.



$\rightarrow$ $3\sqrt{r_2} = 1 \rightarrow r_2 = \frac{1}{9} = r_3$

마찬가지로,

$r_4 = r_5 = \frac{1}{16}$, $r_6 = r_7 = \frac{1}{25}$, $r_8 = r_9 = \frac{1}{36}$, $r_{10}=r_{11}=r_{12}=r_{13}$
$= \frac{1}{49}$ 이다.



(C_2와 C_1, l에 접하는 원과, C_8, C, l에 접하는 원의 반지름이 같음)

$\therefore$ C_n의 반지름 $= \frac{1}{49}$

2. $0<f(x)<2$, $f'(x) = -f(x)\sqrt{2-f(x)}$,

$$a_n = \int_{\frac{1}{n}}^{2024/n} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{n}}^{2024/n} -\frac{f'(x)}{\sqrt{2-f(x)}}\,dx = \left[2\sqrt{2-f(x)}\right]_{\frac{1}{n}}^{2024/n}$$

$$= 2\sqrt{2-f(2024/n)} - 2\sqrt{2-f(\tfrac{1}{n})}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(2\sqrt{2-f(2024/n)} - 2\sqrt{2-f(\tfrac{1}{n})}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} 2\sqrt{2-f(\tfrac{1}{n})} = 0 \quad (\because \lim_{n\to\infty} f(\tfrac{1}{n}) = \lim_{t\to 0+} f(t) = 2)$$

$f'(x) = -f(x)\sqrt{2-f(x)} < 0$ ($\because 0<f(x)<2$) 이므로, $f(x)$는 감소함수이다.
$0<f(x)<2$ 이고, (아래로 유계), 감소하므로, $f(x)$는 $x\to\infty$ 일 때 수렴한다.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ 라 하자 $(0 \le c \le 2)$. $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ 이어야 하므로,

$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty}\left(-f(x)\sqrt{2-f(x)}\right) = 0 \rightarrow -c\sqrt{2-c} = 0$.

$\therefore c = 0 \rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} 2\sqrt{2-f(2024n)} = 2\sqrt{2}$ $\qquad \therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 2\sqrt{2}$

3. $b_n = \int_0^1 e^{-(n+2)x}(1+e^x)^n\,dx$

$$= \left[\frac{1}{n+1}(1+e^x)^{n+1} e^{-(n+3)x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-(n+3)}{n+1} e^{-(n+3)x}\cdot(1+e^x)^{n+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{n+1}(1+e)^{n+1} e^{-(n+3)} - \frac{2^{n+1}}{n+1} + \frac{n+3}{n+1}\, b_{n+1}$$

$$n\,b_n = \frac{n}{n+1}(1+e)^{n+1} e^{-(n+3)} - \frac{n}{n+1}2^{n+1} + \frac{(n+3)}{n+1}\cdot n\cdot b_{n+1}$$

$$\frac{n}{2^n}b_n = \frac{n}{n+1}\left(\frac{1+e}{2}\right)^n\cdot(1+e)\cdot e^{-(n+3)} - \frac{n}{n+1}\cdot 2 + \frac{n+3}{n+1}\cdot n\cdot\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}}\times 2$$

$$\frac{n}{2^n}b_n = \frac{n}{n+1}\left(\frac{1+e}{2e}\right)^n\cdot\frac{(1+e)}{e^3} - \frac{n}{n+1}2 + 2\frac{n+1}{2^{n+1}}b_{n+1}\cdot\frac{(n+3)(n)}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}b_n = -2 + 2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}b_{n+1}\cdot\frac{(n+3)n}{(n+1)^2}$$

$$\left(\because \frac{1+e}{2e} < 1 \rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+e}{2e}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}\frac{(1+e)}{e^3} = 0\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}b_n = 2$$