	한양대학교 2021학년도 신입학전형 수시	
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오전-1번

1. 정적분을 이용하면 $V(t)=\int_1^t (\ln y)^2 dy$, $W(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\ln t}(t-e^x)^2 dx$ 이다. 부분적분을 이용하면

$$V(t)=\int_1^t (\ln y)^2 dy=[y(\ln y)^2]_1^t-2\int_1^t \ln y\, dy=t(\ln t)^2-2[y\ln y-y]_1^t=t(\ln t)^2-2t\ln t+2t-2$$ 이고

$$W(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\ln t}(t-e^x)^2 dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\ln t} e^{2x}-2te^x+t^2 dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}[\frac{1}{2}e^{2x}-2te^x+t^2x]_0^{\ln t}=\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{2}t^2-2t^2+t^2\ln t-\frac{1}{2}+2t)=\frac{\sqrt{3}}{4}(t^2\ln t-\frac{3}{2}t^2+2t-\frac{1}{2})$$

따라서

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t}\frac{W(t)}{V(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t}\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(t^2\ln t-\frac{3}{2}t^2+2t-\frac{1}{2})}{t(\ln t)^2-2t\ln t+2t-2}$$ 이고, 분모 분자를 $t^2(\ln t)^2$로 나눠주면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t}\frac{W(t)}{V(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1-\frac{3}{2\ln t}+\frac{2}{t\ln t}-\frac{1}{2t^2\ln t}}{1-\frac{2}{\ln t}+\frac{2}{(\ln t)^2}-\frac{2}{t(\ln t)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$ 가 된다.

2.

곡선의 길이 $l(t)$를 구하면

$$l(t)=\int_{-1}^t\sqrt{1+(\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}})^2}\ dx=\int_{-1}^t\sqrt{1+\frac{9}{4}(x+1)}\ dx$$
$$=\int_{-1}^t\sqrt{\frac{9}{4}x+\frac{13}{4}}\ dx=\left[\frac{8}{27}(\frac{9}{4}x+\frac{13}{4})^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^t=\frac{8}{27}(\frac{9}{4}t+\frac{13}{4})^{\frac{3}{2}}-\frac{8}{27}$$

이다. 한편, $d(t)$는

$$d(t)=\sqrt{t^2+((t+1)^{\frac{3}{2}})^2}=\sqrt{t^2+(t+1)^3}$$ 이다.

따라서, $\frac{l(t)}{d(t)}=\frac{8}{27}\frac{(\frac{9}{4}t+\frac{13}{4})^{\frac{3}{2}}-1}{\sqrt{t^2+(t+1)^3}}$ 이 된다. 분모와 분자를 $t^{\frac{3}{2}}$ 로 나눈뒤 극한을 구하면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{l(t)}{d(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{8}{27}\frac{(\frac{9}{4}t+\frac{13}{4})^{\frac{3}{2}}-1}{\sqrt{t^2+(t+1)^3}}=\lim_{t\to\infty}\frac{8}{27}\frac{(\frac{9}{4}+\frac{13}{4}\frac{1}{t})^{\frac{3}{2}}-(\frac{1}{t})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{t}+(1+\frac{1}{t})^3}}=\frac{8}{27}(\frac{9}{4})^{\frac{3}{2}}=1$$

이 된다.

3.

양의 실수 x에 대하여 $f(x)=\frac{(x^2-12x+37)^2}{(2x+1)^2}$ 이라고 하자. 이 때, 도함수 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\frac{2(x^2-12x+37)(2x-12)(2x+1)^2-(x^2-12x+37)^2 2(2x+1)2}{(2x+1)^4}$$
$$=\frac{4(x^2-12x+37)\big((x-6)(2x+1)-(x^2-12x+37)\big)}{(2x+1)^3}=\frac{4(x^2-12x+37)(x^2+x-43)}{(2x+1)^3}$$

이때, $x^2-12x+37=(x-6)^2+1>0$ 이고, $x>0$일 때 $(2x+1)^3>0$ 이므로 도함수 $f'(x)$의 부호는 x^2+x-43에 의해 결정된다. x^2+x-43의 $x>0$인 근을 구하면 $x=\frac{-1+\sqrt{173}}{2}$ 이다.

$0<x<\frac{-1+\sqrt{173}}{2}$ 일 때 $f'(x)<0$ 이고, $x>\frac{-1+\sqrt{173}}{2}$ 일 때 $f'(x)>0$ 이므로, $x=\frac{-1+\sqrt{173}}{2}$ 에서 $f(x)$가 최소가 되는 걸 알 수 있다.

$13<\sqrt{173}<14$를 이용하면 $6<\frac{-1+\sqrt{173}}{2}<\frac{13}{2}<7$ 를 알 수 있다. 따라서 $n=6$ 또는 $n=7$인 경우에 $\frac{a_n}{b_n}$가 최소가 된다.

$\frac{a_6}{b_6}=\frac{1}{13^2}<\frac{4}{15^2}=\frac{a_7}{b_7}$ 이므로 $n=6$일 때 최솟값 $\frac{a_6}{b_6}=\frac{1}{13^2}$를 갖는다.

자 연 계	한양대학교 2021학년도 신입학전형 수시 **논 술 예 시 답 안**	오전-2번

1.

$$f'(x)=\frac{1-abx^2}{x^2}\left\{\frac{1}{(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2}-\frac{1}{ab}\right\}$$

a, b, x 는 1 이하이므로, $1-abx^2 \geq 0$ 이고,

$(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2 \geq 9$, $\frac{1}{(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2} \leq \frac{1}{9}$, $\frac{1}{ab} \geq 1$이므로 $\left\{\frac{1}{(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2}-\frac{1}{ab}\right\} \leq 0$,

따라서 $f'(x) \leq 0$ 이다.

2.

$g(1)=h(a+2+\frac{1}{a})$이 되도록 $h(x)=x+\frac{1}{x}$라고 정의하자. 단 $a+2+\frac{1}{a} \geq 4$ 이므로 $h(x)$는 $x \geq 4$에서 정의한다.

이제 $h'(x)=1-\frac{1}{x^2}$ 이고 $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{16} \leq 1$이므로, $h'(x) \geq 0$이다.

$\therefore h(2+a+\frac{1}{a}) \geq h(4)=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$

따라서 $f(c) \geq f(1)=g(b) \geq g(1)=h(a+\frac{1}{a}+2) \geq h(4)=\frac{17}{4}$ 이고 이 값은 $a=b=c=1$일 때의 값이므로 M의 최대값은 $\frac{17}{4}$.

3. 일반적으로 양의 실수 A, B에 대해 아래 식에 제시문과 문항2의 과정을 반복하면,

$$A(a+b+c+d)+\frac{B}{abc+abd+acd+bcd}=A(a+b+c+\frac{1}{abc})+\frac{B}{abc+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

$f(x)=A(a+b+x+\frac{1}{abx})+\frac{B}{abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}}$, $f'(x)=\frac{1-abx^2}{x^2}\left\{\frac{B}{(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2}-\frac{A}{ab}\right\}$

$(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2 \geq 9$, $\frac{B}{(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2} \leq \frac{B}{9}$, $\frac{A}{ab} \geq A$이므로 $A \geq \frac{B}{9}$ 이면 $f'(x) \leq 0$.

$g(x)=A(a+x+1+\frac{1}{ax})+\frac{B}{ax+\frac{1}{a}+\frac{1}{x}+1}$, $g'(x)=\frac{1-ax^2}{x^2}\left\{\frac{B}{(ax+\frac{1}{a}+\frac{1}{x}+1)^2}-\frac{A}{a}\right\}$

$A \geq \frac{B}{9}$이면, $g'(x) \leq 0$이다.

$h(x)=Ax+\frac{B}{x}$, $x \geq 4$, $h'(x)=A-\frac{B}{x^2}$

$\frac{B}{x^2} \leq \frac{B}{16} \leq \frac{B}{9}$이므로, $\frac{B}{9} \leq A$ 이면 $h'(x) \geq 0$이다.

$A=2$, $B=17$ 일 때 $\frac{17}{9} \leq 2$ 이므로 각 단계에 필요한 부등식을 모두 만족한다.

$\therefore h(2+a+\frac{1}{a}) \geq h(4)=4A+\frac{B}{4}=8+\frac{17}{4}=\frac{49}{4}$ 가 K의 최대값이 된다.

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

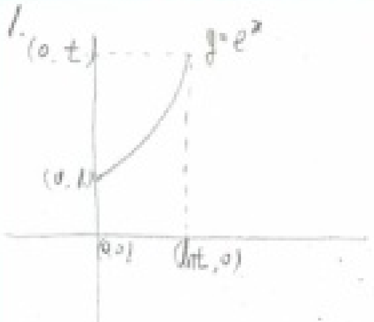
지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:020301)	

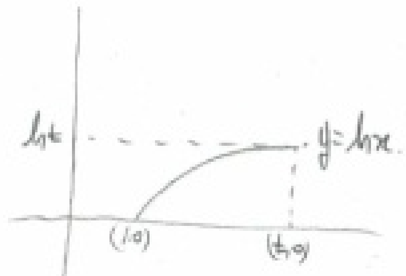
수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.





곡선 $y=e^x\ (0\le x\le \ln t)$와 y축, 직선 $y=t$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=\ln x\ (1\le x\le t)$와 x축, 직선 $x=t$로 둘러싸인 도형의 넓이와 동일하다.

따라서 $V(t)=\int_1^t (\ln x)^2\,dx$ $\ln x = k$ $\frac{1}{x}=\frac{dk}{dx}$

$$=\int_0^{\ln t} k^2 e^k\,dk$$

$$=\Big[(k^2-2k+2)e^k\Big]_0^{\ln t}=\{(\ln t)^2-2\ln t+2\}t-2$$

$$W(t)=\int_0^{\ln t}\frac{\sqrt3}{4}(t-e^x)^2\,dx$$

$$=\frac{\sqrt3}{4}\int_0^{\ln t}(t^2-2te^x+e^{2x})\,dx$$

$$=\frac{\sqrt3}{4}\Big[t^2x-2te^x+\frac12 e^{2x}\Big]_0^{\ln t}$$

$$=\frac{\sqrt3}{4}\left(t^2\ln t-\frac32 t^2+2t-\frac12\right)$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t}\frac{W(t)}{V(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t}\times\frac{\frac{\sqrt3}{4}\left(t^2\ln t-\frac32 t^2+2t-\frac12\right)}{t\{(\ln t)^2-2\ln t+2\}-2}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{\sqrt3}{4}-\frac{3\sqrt3}{8}\frac{1}{\ln t}+\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{1}{t\ln t}-\frac{\sqrt3}{8}\frac{1}{t^2\ln t}}{1-\frac{2}{\ln t}+\frac{2}{(\ln t)^2}-\frac{2}{t^2(\ln t)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt3}{4}$$

2.

$y=(x+1)^{\frac32}=f(x)$라 하자.

$f'(x)=\frac32(x+1)^{\frac12}$

$$l(t)=\int_{-1}^{t}\sqrt{1+\left(\frac32(x+1)^{\frac12}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{t}\sqrt{\frac94x+\frac{13}{4}}\,dx=\left[\frac23\left(\frac94x+\frac{13}{4}\right)^{\frac32}\times\frac49\right]_{-1}^{t}$$

$$=\frac{8}{27}\left\{\left(\frac94t+\frac{13}{4}\right)^{\frac32}-1\right\}$$

$$d(t)=\sqrt{t^2+(t+1)^3}$$

$$=\sqrt{t^3+4t^2+3t+1}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{l(t)}{d(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{8}{27}\left(\frac94t+\frac{13}{4}\right)^{\frac32}-1}{\sqrt{t^3+4t^2+3t+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\dfrac{\frac{8}{27}\left(\frac94t+\frac{13}{4}\right)^{\frac32}-1}{t\sqrt t}}{\dfrac{\sqrt{t^3+4t^2+3t+1}}{t\sqrt t}}=\frac{\frac{8}{27}\times\frac94\times\frac32}{1}=1$$

3.

$a_n=(n^2-12n+37)^2$, $b_n=(2n+1)^2$.

$\frac{a_n}{b_n}$이 최소가 되는 n의 값은 $\frac{n^2-12n+37}{2n+1}$이 최소가 되는 n의 값과 동일하다.

$\frac{n^2-12n+37}{2n+1}=f(n)$ 이라 하자.

$$f'(n)=\frac{(2n-12)(2n+1)-(n^2-12n+37)\times2}{(2n+1)^2}$$

$$=\frac{2n^2+2n-86}{(2n+1)^2}$$

$n=\frac{-1+\sqrt{173}}{2}$ 일때 $f'(n)=0$ 이고 $f(n)$은 최솟값을 갖는다.

$6\le\frac{-1+\sqrt{173}}{2}\le 7$ 이고 n은 자연수 이므로

$f(6)$과 $f(7)$의 값 중 더 작은 값이 $\frac{a_n}{b_n}$이 최소가 되는 n이다.

$f(6)=\frac{1}{13}$, $f(7)=\frac{2}{15}$

$f(6)<f(7)$ 이므로

$\frac{a_n}{b_n}$이 최소가 되는 n의 값은 6 이고

$\frac{a_n}{b_n}=\left(\frac{1}{13}\right)^2=\frac{1}{169}$ 이다.

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

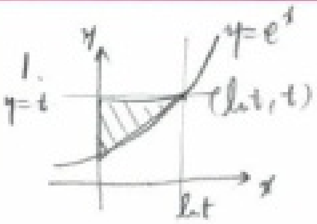
지원학과	
성　명	
수험번호	
생년월일 (예:020301)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.



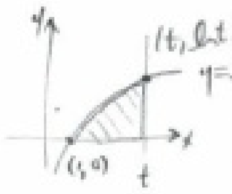
도형 B를 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 $t-e^x$를 한변으로 하는 정삼각형이므로 $W(t)=\int_0^{\ln t}\frac{\sqrt{3}}{4}(t-e^x)^2\,dx$

$W(t)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\ln t}(t^2-2te^x+e^{2x})\,dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left[t^2x-2te^x+\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln t}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(t^2\ln t-2t^2+\frac{1}{2}t^2+2t-\frac{1}{2}\right)$

도형 A를 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한변이 $\ln x$인 정사각형이므로 역함수를 취하면,



$V(t)=\int_1^t(\ln x)^2\,dx$

$=\left(\left[x(\ln x)^2\right]_1^t-\int_1^t 2\times x\times\ln x\times\frac{1}{x}\,dx\right)$

$=\left(t(\ln t)^2-2t\ln t+2t-2\right)$

$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t}\frac{W(t)}{V(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t}\times\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(t^2\ln t-\frac{3}{2}t^2+2t-\frac{1}{2}\right)}{t(\ln t)^2-2t\ln t+2t-2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\lim_{t\to\infty}\frac{t\ln t-\frac{3}{2}t+2-\frac{1}{2t}}{t(\ln t)-2t+\frac{2t}{\ln t}-\frac{2}{\ln t}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\lim_{t\to\infty}\frac{1-\frac{3}{2\ln t}+\frac{2}{t\ln t}-\frac{1}{2t^2\ln t}}{1-\frac{2}{\ln t}+\frac{2}{(\ln t)^2}-\frac{2}{t(\ln t)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1-0+0-0}{1-0+0-0}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore\ \frac{\sqrt{3}}{4}$

2. $y'=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{x+1}$

$l(t)=\int_{-1}^t\sqrt{1+\frac{9}{4}(x+1)}\,dx=\frac{1}{27}\left[(9x+13)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^t=\frac{1}{27}\left((9t+13)^{\frac{3}{2}}-8\right)$

$d(t)=\sqrt{t^2+(t+1)^3}$

$\lim_{t\to\infty}\frac{l(t)}{d(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{27}\times\frac{\sqrt{(9t+13)^3}-8}{\sqrt{t^2+(t+1)^3}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{27}\times\frac{\sqrt{\left(9+\frac{13}{t}\right)^3}-\frac{8}{\sqrt{t^3}}}{\sqrt{\frac{1}{t}+\left(1+\frac{1}{t}\right)^3}}$

$=\frac{1}{27}\times\frac{9^{\frac{3}{2}}}{1}=\frac{1}{27}\times 3^3=1$

$\therefore\ 1$

3. $a_n=(n^2-12n+37)^2$ $\quad b_n=(2n+1)^2$

$\frac{a_n}{b_n}=\left(\frac{n^2-12n+37}{2n+1}\right)^2$ 이 최소가 되려면

$\frac{n^2-12n+37}{2n+1}$ 이 최소가 되어야한다.

$\frac{n^2-12n+37}{2n+1}=f(n)$ 라 하면, $\quad f'(n)=\frac{2(n^2+n-43)}{(2n+1)^2}$

이때 이차방정식 $n^2+n-43=0$은 판별식 $=1-4\times(-43)>0$ 이므로 두개의 실근을 가지며, 두 실근은 $\frac{-1\pm\sqrt{173}}{2}$ 이다.

이때 $n=\frac{-1-\sqrt{173}}{2}$ 에서 $f(n)$은 극댓값을 가지며,

$n=\frac{-1+\sqrt{173}}{2}$ 에서 $f(n)$는 극솟값을 가진다.

$6<\frac{-1+\sqrt{173}}{2}<7$ 이므로 $f(n)$이 최소일때 n의 값은 6 또는 7 이다

$f(6)=\frac{36-72+37}{13}=\frac{1}{13}$ $\quad f(7)=\frac{49-84+37}{15}=\frac{2}{15}$

$f(6)<f(7)$ 이므로 $f(n)$은 $n=6$ 일때 최솟값을 가진다.

따라서 $\frac{a_n}{b_n}$이 최소가되는 자연수 n은 6이며,

그때의 $\frac{a_n}{b_n}=\left(\frac{1}{13}\right)^2=\frac{1}{169}$

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨