한양대학교 2021학년도 신입학전형 수시 논술고사		
자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	오전-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 오전 - 1번 문제는 고등학교 수학교과과정 중 수학II와 미적분의 주요내용을 바탕으로 출제하였다. 다음과 같이 3개의 소문항을 통해서, 여러 가지 미분법, 적분의 활용, 함수의 극한 등을 적절히 활용하여 문제를 논리적으로 해결할 수 있는지를 묻고 있다. 특히, 수학의 개념과 원리를 정확히 이해하고 수학적 사고력을 바탕으로 논리적으로 문제를 해결할 수 있는 능력을 측정하는데 주안점을 두고 출제를 하였다.

문항 1. 입체도형의 단면의 넓이가 주어졌을 때 정적분을 이용하여 두 종류의 입체도형의 부피를 구하고, 함수의 극한을 이용하여 극한값을 구하는 문제이다.

문항 2. 주어진 곡선의 길이를 미분과 적분을 이용하여 구하고, 곡선 위의 점과 원점 사이의 거리와의 비율을 구한 뒤, 함수의 극한을 이용해 극한값을 구하는 문제이다.

문항 3. 몫의 미분법을 통해서 함수의 도함수를 구하고 이를 활용하여 함수의 그래프의 증가와 감소를 파악하도록 하였다. 미분과 그래프의 증가와 감소를 이용해 최솟값을 구하는 문제이다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	정적분을 이용하여 도형의 부피 $V(t)$와 $W(t)$를 정확히 구하였는가?	20
		극한값을 정확히 구하였는가?	10
2	40	곡선의 길이 $l(t)$와 원점으로부터의 거리 $d(t)$를 정확히 구하였는가?	30
		극한값을 정확히 구하였는가?	10
3	30	미분을 이용하여 그래프의 개형과 최솟값을 구하였는가?	20
		최소가 되는 n과 이때의 $\frac{a_n}{b_n}$을 정확히 구하였는가?	10

3. 출제근거

고등학교 수학 I , 좋은책 신사고 (고성은 외), 2018, p.113~p.114
고등학교 수학 II , 지학사 (홍성복 외), 2018, p.20~p.24
고등학교 수학 II , 비상교육 (김원경 외), 2018, p.86~p.89
고등학교 미적분, 천재교과서 (류희찬 외), 2019, p.54~p.61, p.186~p.188, p.191~p.198
고등학교 미적분, 천재교육 (이준열 외), 2019, p.155~p.158

한양대학교 2021학년도 신입학전형 수시 논술고사		
자 연 계	출제 의도 및 평가 지침	오전-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

본 문제에서는 도함수를 이용하여 절대부등식을 도출하는 과정을 제시하고, 이 과정을 잘 이해하였는지, 이해하였다면 이를 다른 경우에 적용할 수 있는지를 묻고 있다. 이를 통해 수학적 독해능력과 적용능력을 평가하려 하였다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	20	(ㄱ)에 알맞은 수식을 정확히 썼는가?	10
		도함수의 값이 0보다 작거나 같은 이유를 명확히 설명하였는가?	10
2	40	최댓값을 구하는 과정을 명확히 설명하였는가?	30
		구한 최댓값은 정확한가?	10
3	40	최댓값을 구하는 과정을 명확히 설명하였는가?	30
		구한 최댓값은 정확한가?	10

3. 출제 근거

고등학교 수학, 비상교육 (김원경 외), 2018, p.191~p.198
고등학교 수학Ⅱ, 비상교육 (김원경 외), 2018, p.35~p.42
고등학교 수학Ⅱ, 천재교육 (이준열 외), 2018, p.92~p.93
고등학교 미적분, 천재 교과서 (류희찬 외), 2019, p.96~p.107

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

[2-1]

$$f(x)=a+b+x+\frac{1}{abx}+\frac{1}{abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}}$$

$$f'(x)=1+\frac{1}{ab}x-\frac{1}{x^2}+\frac{-(ab-\frac{1}{x^2})}{(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2}$$

$$=1-\frac{1}{abx^2}+\frac{\frac{1}{x^2}-ab}{(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2}$$

$$=\frac{1}{x^2}(x^2-\frac{1}{ab})+\frac{1}{x^2}(1-abx^2)\times\frac{1}{(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2}$$

$$=\frac{1}{x^2}(x^2-\frac{1}{ab})-\frac{1}{x^2}\times ab(x^2-\frac{1}{ab})\times\frac{1}{(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2}$$

$$=\frac{1}{x^2}(x^2-\frac{1}{ab})\left\{1-ab\times\frac{1}{(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{x^2}(x^2-\frac{1}{ab})\times(-ab)\times\left\{\frac{1}{(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2}-\frac{1}{ab}\right\}$$

따라서 (ㄱ) $=(1-abx^2)$

이때, $0<x\le1$, $0<a, b\le1$ 이므로

$(1-abx^2)\ge0$, $(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2>ab$ ($\because$ $abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}>1$, $ab<1$)

이므로 $\frac{1}{(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2}-\frac{1}{ab}<0$

$\rightarrow f'(x)\le0$

$\boxed{\therefore\ (ㄱ)=(1-abx^2),\ f'(x)\le0}$

[2-2]

$$g(1)=(a+2+\frac{1}{a})+\frac{1}{(a+\frac{1}{a}+2)}=h(a+\frac{1}{a}+2)$$

이므로 $h(x)=x+\frac{1}{x}$ (단, $x\ge4$)

$h'(x)=1-\frac{1}{x^2}$ $x\ge4$ 이므로 $h'(x)\ge0$

$h'(x)\le0$ 이므로 $h(a+\frac{1}{a}+2)\ge h(4)=\frac{17}{4}$

따라서

$f(c)\ge g(b)\ge h(a+\frac{1}{a}+2)\ge h(4)\le\frac{17}{4}$

$\rightarrow f(c)\ge\frac{17}{4}$

$\boxed{\therefore\ M\text{의 최댓값은 }\frac{17}{4}\text{이다.}}$

[2-3]

$$2(a+b+c+d)+\frac{17}{abc+abd+acd+bcd}\ge k$$

(단, $abcd=1$, $0<a, b, c, d\le1$)

위 부등식을 만족시키는 양의 실수 M의 최댓값을 다음과 같이 구하려 한다.
위 부등식을 아래와 같이 쓰자.

$$2(a+b+c+\frac{1}{abc})+\frac{17}{abc+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\ge k$$

$f(x)=2(a+b+x+\frac{1}{abx})+\frac{17}{abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}}$ (단, $0<x\le1$) 이라 하면

$$f'(x)=(\frac{1}{x^2}-ab)\left(\frac{17}{(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2}-\frac{2}{ab}\right)\le0$$

($\because$ $\frac{1}{x^2}-ab\ge0$, $(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2\ge16$, $ab\le1$ 이므로

$\frac{17}{(abx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x})^2}-\frac{2}{ab}<0$) 이므로

$f(c)\ge f(1)$.

이번에는 $f(1)=g(b)$ 가 되도록

$g(x)=2(a+x+1+\frac{1}{ax})+\frac{17}{ax+\frac{1}{a}+\frac{1}{x}+1}$ (단, $0<x\le1$) 이라 하면

$g'(x)\le0$ 이므로 $g(b)\ge g(1)$

마지막으로 $g(1)=h(a+\frac{1}{a}+2)$ 가 되는 $h(x)$를 생각하면

$h(x)=2x+\frac{17}{x}$ (단 $x\ge4$), $h'(x)=2-\frac{17}{x^2}$ $x\ge4$ 이므로

$h'(x)>0$ 이므로 $h(a+\frac{1}{a}+2)\ge h(4)=8+\frac{17}{4}$

따라서

$f(c)\ge g(b)\ge h(a+\frac{1}{a}+2)\ge h(a+\frac{1}{a}+2)\ge h(4)=\frac{49}{4}$

$\rightarrow f(c)\ge\frac{49}{4}$

$\boxed{\therefore\ k\text{의 최댓값은 }\frac{49}{4}\text{이다}}$

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $f'(x) = 1 + \frac{1}{ab} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{-\left(ab - \frac{1}{x^2}\right)}{\left(abx + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}\right)^2}$

$$= \frac{1}{x^2}\left(x^2 - \frac{1}{ab} + \frac{1 - abx^2}{\left(abx + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1-abx^2}{x^2}\left(\frac{1}{\left(abx + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}\right)^2} - \frac{x^2 - \frac{1}{ab}}{abx^2 - 1}\right)$$

$$= \frac{1-abx^2}{x^2}\left(\frac{1}{\left(abx + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}\right)^2} - \frac{1}{ab}\left(\frac{x^2 - \frac{1}{ab}}{x^2 - \frac{1}{ab}}\right)\right)$$

$$= \frac{1-abx^2}{x^2}\left(\frac{1}{\left(abx + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}\right)^2} - \frac{1}{ab}\right)$$

따라서 (ㄱ)은 $1-abx^2$ 이다.

또한 $\frac{1-abx^2}{x^2} > 0$ 이고 $abx + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}$ 은 1이하의 모든 양의 실수 a, b와 $(0<x\leq 1)$ 에서 $abx + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} > 1$ 이다

따라서 $\left(abx + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}\right)^2 > 1$ 이고 $ab \leq 1$ 이므로

$\frac{1}{\left(abx + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}\right)^2} < 1$ 이고 $\frac{1}{ab} \geq 1$ 이다

$$\therefore \frac{1}{\left(abx + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}\right)^2} - \frac{1}{ab} < 0$$

$\frac{1-abx^2}{x^2}\left(\frac{1}{\left(abx + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}\right)^2} - \frac{1}{ab}\right) \leq 0$ 이 성립한다.

2. $g(1) = a + \frac{1}{a} + 2 + \frac{1}{a + \frac{1}{a} + 2}$ 이므로

$g(1) = h\left(a + \frac{1}{a} + 2\right)$ 가 되는 $h(x)$를 생각하면

$h(x) = x + \frac{1}{x}$ (단, $x \geq 4$) 이다.

$h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ 이므로 $h\left(a + \frac{1}{a} + 2\right) \geq h(4)$ 가 성립한다.

따라서 $a=1, b=1, c=1$ 일때

M이 최소가 되므로 M의 최댓값은 $4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$ 이다.

3. $2(a+b+c+d) + \frac{17}{abc + abd + acd + bcd} \geq K$

를 아래와 같이 쓰자

$$2\left(a+b+c+\frac{1}{abc}\right) + \frac{17}{abc + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \geq K$$

$f(x) = 2\left(a+b+x+\frac{1}{abx}\right) + \frac{17}{abx + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}}$ (단, $0<x\leq 1$) 이라 하면,

$f'(x) = \frac{1-abx^2}{x^2}\left(\frac{17}{\left(abx + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}\right)^2} - \frac{2}{ab}\right)$ 이고,

$\left(abx + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}\right)^2 \geq 16$ 이고 $ab \leq 1$ 이므로

$\frac{17}{\left(abx + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}\right)^2} \leq \frac{17}{16}$ 이고 $\frac{2}{ab} \geq 2$ 이다.

따라서 $f'(x) < 0$ 이므로 $f(c) \geq f(1)$ 이 성립한다

이번에는 $f(1) = g(b)$ 가 되도록 $g(x) = 2\left(a+x+1+\frac{1}{ax}\right) + \frac{17}{ax + \frac{1}{a} + \frac{1}{x} + 1}$ (단, $0<x\leq 1$)

이라하면 $g'(x) \leq 0$ 이므로 $g(b) \geq g(1)$ 이 성립한다

마지막으로 $g(1) = h\left(a + \frac{1}{a} + 2\right)$ 가 되는 $h(x)$를 생각하면

$h(x) = x + \frac{1}{x}$ (단, $x \geq 4$) 이므로

$h(x) \geq h(4)$ 가 성립한다

따라서 $a=1, b=1, c=1$ 이고 $abcd=1$ 이므로 d도 1일때

상수 K가 최대가 되므로 K의 최댓값은

$2 \times 4 + \frac{17}{4} = 8 + \frac{17}{4} = \frac{49}{4}$ 이다.