한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시

| 자 연 계 | # 논 술 예 시 답 안 | 오후(2)-1번 |
|---|---|---|

1. 포물선의 방정식을 정리하면 $(y-1)^2=4(x-3)$

$(y-1)^2=4(x-3)$을 $x$축 방향으로 $-3$만큼, $y$축 방향으로 $-1$만큼 평행이동하여 얻는 새로운 포물선 $y^2=4x$를 고려하자.

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(x_0,y_0)$에서의 접선의 방정식은 $x-\dfrac{y_0^2}{4}=x-x_0=\dfrac{y_0}{2}(y-y_0)$, 즉, $x=\dfrac{y_0}{2}(y-y_0)+\dfrac{y_0^2}{4}$ …… ①

이 접선이 $(a,b)$를 지난다면 $a=\dfrac{y_0}{2}(b-y_0)+\dfrac{y_0^2}{4}$이고 정리하면 $y_0$에 대한 이차 방정식 $y_0^2-2by_0+4a=0$을 얻는다. 이를 ②라 하자.

점 $(a,b)$에서 포물선 $y^2=4x$에 두 개의 접선을 그을 수 있을 때, 접선과 포물선의 접점을 각각 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,y_2)$라 하면 $y_1$과 $y_2$는 ②의 해이고 근과 계수와의 관계에 의해 $y_1y_2=4a$ …… ③

한편, 두 접선이 수직으로 만나면 $y_1y_2\neq 0$이고, 점 P, Q에서의 접선의 기울기는 ①에 의해 각각 $\dfrac{2}{y_1}$, $\dfrac{2}{y_2}$이다.

따라서 $\dfrac{4}{y_1y_2}=-1$, 즉, $y_1y_2=-4$ …… ④

③과 ④을 연립하면 $a=-1$을 얻는다.

이제 원래의 포물선을 다루기 위해 $a=-1$를 $x$축 방향으로 3만큼, $y$축 방향으로 1만큼 평행이동하면 $a=2$ ($b$는 임의의 실수)가 우리가 원하는 점 $(a,b)$의 집합이 됨을 알 수 있다.

2. 타원 $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$ 위의 점 $(x_0,y_0)$에서의 접선의 방정식은 $x_0x+\dfrac{y_0y}{9}=1$

$y_0\neq 0$이면 $y=-\dfrac{9x_0}{y_0}x+\dfrac{9}{y_0}$ (점 $(-2,s)$에서 타원 $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$에 그은 접선의 접점 $(x_0,y_0)$은 $y_0\neq 0$을 만족한다.)

$m=-\dfrac{9x_0}{y_0}$라 하자. $81x_0^2+9y_0^2=81$의 양변을 $y_0^2$으로 나누면 $m^2+9=\dfrac{81x_0^2}{y_0^2}+9=\dfrac{81}{y_0^2}$가 되므로 $\dfrac{9}{y_0}=\pm\sqrt{m^2+9}$

따라서 기울기가 $m$인 타원 $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$의 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{m^2+9}$

이 식이 점 $(-2,s)$를 지나면 $s=-2m\pm\sqrt{m^2+9}$이고, 이를 정리하면 $3m^2+4sm+(s^2-9)=0$

점 $(-2,s)$를 지나는 접선의 방정식의 기울기를 $m_1$, $m_2$라 하면 근과 계수와의 관계에 의하여

$m_1+m_2=-\dfrac{4s}{3}$, $m_1m_2=\dfrac{s^2-9}{3}$이고, 이로부터 $|m_1-m_2|=\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}=\dfrac{2}{3}\sqrt{s^2+27}$을 얻는다.

기울기 $m_1$, $m_2$인 두 직선이 이루는 각을 $\theta$라 하면 $\tan\theta=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$

따라서 $\tan\theta=\dfrac{2\sqrt{s^2+27}}{s^2-6}$ ($s>\sqrt{6}$)

3. 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{9}=1$ 위의 점 $(x_0,y_0)$에서의 접선의 방정식은 $x_0x-\dfrac{y_0y}{9}=1$

이 접선이 점 $(t,6)$을 지나면 $tx_0-\dfrac{2y_0}{3}=1$ …… ⑤

이를 $x_0^2-\dfrac{y_0^2}{9}=1$과 연립하면 $(t^2-4)x_0^2-2tx_0+5=0$ …… ⑥

점 $(t,6)$에서 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{9}=1$에 그을 수 있는 접선의 개수가 2이기 위해서는 ⑥이 $x_0$에 대한 이차 방정식으로써 두 개의 실근을 가져야 한다. 이 때 $y_0$는 ⑤에 의해 유일하게 결정되며 $x_0$는 $x_0\leq -1$ 또는 $x_0\geq 1$을 만족한다.

경우 1) $t=\pm 2$일 때 ⑥은 $x_0$에 대한 일차 방정식이고 하나의 실근만을 갖는다.

경우 2) $t \neq \pm 2$이라 가정하자. ⑥의 판별식이 양수이면, 즉, $D/4 = t^2 - 5(t^2-4) = 4(5-t^2) > 0$이면 두 개의 실근을 갖는다.

따라서 $-\sqrt{5} < t < -2$, $-2 < t < 2$, $2 < t < \sqrt{5}$일 때 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$에 그을 수 있는 접선의 개수가 2이다.

| 한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시 | | |
|---|---|---|
| 자 연 계 | **논 술 예 시 답 안** | 오후(2)-2번 |

1. 함수 $f(x)=\sin x$는 미분 가능하므로,

평균값 정리에 의해 $a<x<b$인 실수 $x$에 대하여 $\sin b-\sin x=(\cos\alpha)(b-x)$인 $\alpha\in(x,b)$가 존재한다.

또한, $f'(x)=\cos x$는 구간 $[0,\pi]$에서 감소하므로, $\cos a \geq \cos\alpha \geq \cos b$가 성립한다.

그런데, $b-x>0$이므로, $(b-x)\cos a \geq (b-x)\cos\alpha = \sin b-\sin x \geq (b-x)\cos b$이다.

각 변을 $a$에서 $b$까지 적분하면, $\int_a^b (b-x)\cos b\,dx \leq \int_a^b(\sin b-\sin x)dx \leq \int_a^b(b-x)\cos a\,dx$ 이다.

그러므로 $\frac{1}{2}(b-a)^2\cos b \leq \int_a^b(\sin b-\sin x)dx \leq \frac{1}{2}(b-a)^2\cos a$ 이다.

2. $\int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\cos x - \left[-e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x\,dx\right]$

$\therefore \int e^{-x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)$.

① $\int_{(k-\frac{1}{2})\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi} e^{-x}\cos x\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)\right]_{(k-\frac{1}{2})\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi} = (-1)^k\frac{1}{2}\left(e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}+e^{-(k-\frac{1}{2})\pi}\right)$

② $a_n = \int_{(k-\frac{1}{2})\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi}\left|e^{-x}\cos x\right|dx = \begin{cases} \int_{(k-\frac{1}{2})\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi} e^{-x}\cos x\,dx,\ k=\text{짝수} \\ -\int_{(k-\frac{1}{2})\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi} e^{-x}\cos x\,dx,\ k=\text{홀수}\end{cases} = \frac{1}{2}\left(e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}+e^{-(k-\frac{1}{2})\pi}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-(k-\frac{1}{2})\pi}+e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}\right)$

따라서 급수의 합은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(e^{-(k-\frac{1}{2})\pi}+e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[e^{-\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi}+e^{-\frac{5}{2}\pi}+\cdots+e^{-(n-\frac{1}{2})\pi}+e^{-(n+\frac{1}{2})\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[e^{-\frac{1}{2}\pi}+2\frac{e^{-\frac{3}{2}\pi}(1-e^{-(n-1)\pi})}{1-e^{-\pi}}+e^{-(n+\frac{1}{2})\pi}\right] = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\pi}+\frac{e^{-\frac{3}{2}\pi}}{1-e^{-\pi}} = \frac{1}{2}\frac{e^{-\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi}}{1-e^{-\pi}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi}}{2}\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}$$

3. $b_1=\frac{3}{2}$, $b_k-b_{k-1}=\frac{1}{k+1}$ 이다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k}{k}-\frac{b_k}{k+1}\right) = \left(b_1-\frac{b_1}{2}\right)+\left(\frac{b_2}{2}-\frac{b_2}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{b_n}{n}-\frac{b_n}{n+1}\right)\\ &= b_1+\frac{1}{2}(b_2-b_1)+\frac{1}{3}(b_3-b_2)+\cdots+\frac{1}{n}(b_n-b_{n-1})-\frac{b_n}{n+1}\\ &= \frac{3}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{b_n}{n+1}\\ &= 2-\frac{1}{n+1}-\frac{b_n}{n+1}\end{aligned}$$

부등식 $\ln(n+1)=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx \leq b_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} \leq 1+\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx = 1+\ln(n+1)$이 성립하므로,

각 변을 $n+1$로 나누고 극한 $\lim_{n\to\infty}$을 취하면, $0=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n+1} \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)=0$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n+1}=0$이므로, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k(k+1)}=2$이다.