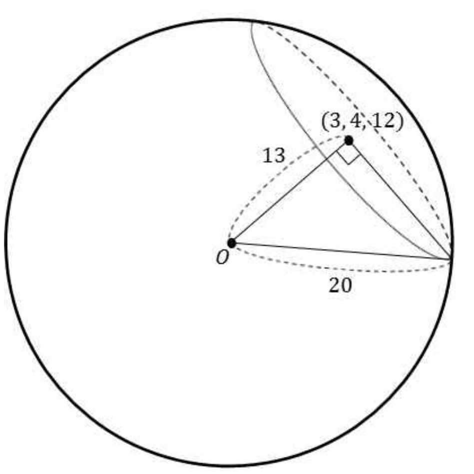
<table>
<tr><td colspan="3" align="center">한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시</td></tr>
<tr><td>자 연 계</td><td align="center">논 술 예 시 답 안</td><td>오후(1)-1번</td></tr>
</table>

1.



원 C의 중심 $(3,4,12)$와 원점과의 거리 $= \sqrt{3^2+4^2+12^2} = 13$ 이다.

따라서 C의 반지름 $= \sqrt{20^2-13^2} = \sqrt{231}$ 이고, C의 넓이는 231π 이다.

평면 $4x+5y-20z=1$의 법선벡터를 $(4,5,-20)$, 원 C를 포함하는 평면의 법선벡터를 $(3,4,12)$로 택하자. 두 평면이 이루는 각을 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면,

$$\cos\theta = \frac{|(3,4,12)\bullet(4,5,-20)|}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}\sqrt{4^2+5^2+(-20)^2}} = \frac{16}{21} \text{ 이다.}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는 $231\pi\cdot\frac{16}{21} = 176\pi$ 이다.

2. 평면 α의 방정식은 $z=my$ 또는 $y=0$ ($xz-$평면)라 할 수 있다. 따라서 α의 법선벡터는 $(0,m,-1)$ 또는 $(0,1,0)$로 택할 수 있다. 원 C를 포함하는 평면이 이루는 각을 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$$\cos\theta = \frac{|(0,m,-1)\bullet(3,4,12)|}{\sqrt{0^2+m^2+(-1)^2}\sqrt{3^2+4^2+12^2}} \text{ 또는 } \frac{|(0,1,0)\bullet(3,4,12)|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}\sqrt{3^2+4^2+12^2}} = \frac{|4m-12|}{13\sqrt{m^2+1}} \text{ 또는 } \frac{4}{13}\text{이다.}$$

$\frac{|4m-12|}{13\sqrt{m^2+1}}$는 $m=-\frac{1}{3}$일 때 최댓값 $\frac{4}{13}\sqrt{10}$을 갖는다. 따라서 $\frac{A_\alpha}{A}=\cos\theta$의 최댓값은 $\frac{4}{13}\sqrt{10}$이다.

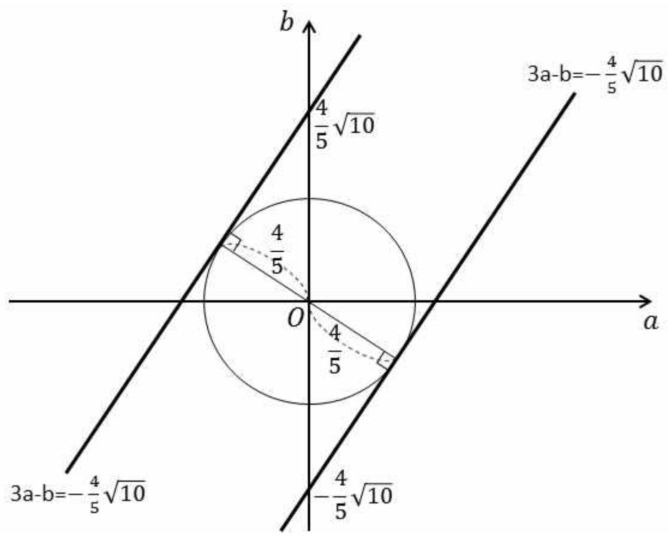
(다른 풀이) 평면 α의 방정식은 $(\cos t)y+(\sin t)z=0$이라 할 수 있고, 따라서 $(0,\cos t,\sin t)$를 α의 법선벡터로 택하자. 평면 α와 원 C를 포함하는 평면이 이루는 각을 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면,

$$\frac{A_\alpha}{A} = \cos\theta = \frac{|(0,\cos t,\sin t)\bullet(3,4,12)|}{\sqrt{0^2+\cos^2 t+\sin^2 t}\sqrt{3^2+4^2+12^2}} = \frac{|4\cos t+12\sin t|}{13} = \frac{4\sqrt{10}}{13}\left|\frac{1}{\sqrt{10}}\cos t+\frac{3}{\sqrt{10}}\sin t\right|$$

$$= \frac{4\sqrt{10}}{13}|\sin\beta\cos t+\cos\beta\sin t| = \frac{4\sqrt{10}}{13}|\sin(\beta+t)| \le \frac{4}{13}\sqrt{10}$$

(단, β는 $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{10}}$을 만족한다.) 따라서 $\frac{A_\alpha}{A}$의 최댓값은 $\frac{4}{13}\sqrt{10}$이다.

3. 원이 놓여 있는 평면의 단위 법선벡터를 (a,b,c)라 하자. ($a^2+b^2+c^2=1$이다.) 원의 $xy-$평면 위로의 정사영의 넓이 $=6\pi=\frac{|(0,0,1)\bullet(a,b,c)|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot\sqrt{10}^2\pi=|c|\cdot10\pi$ 이다. 따라서 $|c|=\frac{3}{5}$이고, $a^2+b^2=1-c^2=\frac{16}{25}$이다.



원의 평면 $3x-y=1$위로의 정사영의 넓이

$$= \frac{|(3,-1,0)\bullet(a,b,c)|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+0^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot\pi(\sqrt{10})^2 = \sqrt{10}\pi|3a-b|$$

이다.

$|3a-b|=k$라 하면, a, b는 $a^2+b^2=\frac{16}{25}=\left(\frac{4}{5}\right)^2$을 만족하므로,

k의 최댓값은 $\frac{4}{5}\sqrt{10}$이다.

따라서 구하는 정사영의 넓이의 최댓값은 $\sqrt{10}\pi\cdot\frac{4}{5}\sqrt{10}=8\pi$

이다.

	한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시	
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(1)-2번

1. 원점 $(0,0)$과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,f(x))$ 사이의 거리의 제곱을 $g(x)$ $(0\le x\le 1)$라 하자.

함수 $g(x)$의 정의에 의해 $g(x)=x^2+(1-x^n)^{\frac{2}{n}}$이다.

$g(0)=1$, $g(1)=1$이고, $g'(x)=2x-2(1-x^n)^{\frac{2}{n}-1}x^{n-1}$이다. $0<x<1$일 때

$$g'(x)>0 \Leftrightarrow x-(1-x^n)^{\frac{2}{n}-1}x^{n-1}>0 \Leftrightarrow x^{2-n}-(1-x^n)^{\frac{2-n}{n}}>0 \Leftrightarrow x^{2-n}>(1-x^n)^{\frac{2-n}{n}} \Leftrightarrow x<(1-x^n)^{\frac{1}{n}}\ (n\ge 3\text{이므로})$$

$$\Leftrightarrow x^n<1-x^n \Leftrightarrow x^n<\frac{1}{2} \Leftrightarrow x<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

비슷한 방법으로 $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$, 그리고 $g'(x)<0 \Leftrightarrow x>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$임을 확인할 수 있다.

따라서 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$에서 $g(x)$가 최대가 된다.

$f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$이므로 원하는 점 A의 좌표는 $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}},\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$이다.

2. $0<x<1$일 때 $f'(x)=-(1-x^n)^{\frac{1-n}{n}}x^{n-1}<0$이다.

곡선 $y=f(x)$의 한 점 $(x_0,f(x_0))$의 접선의 방정식은 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

점 P의 좌표를 $(p,0)$, 점 Q의 좌표를 $(0,q)$이라 하면 $0=f'(x_0)(p-x_0)+f(x_0)$, $q=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$

따라서 $p=\dfrac{f(x_0)-x_0f'(x_0)}{-f'(x_0)}$, $q=f(x_0)-x_0f'(x_0)$

즉, 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{f(x_0)-x_0f'(x_0)}{-f'(x_0)},0\right)$, 점 Q의 좌표는 $(0,f(x_0)-x_0f'(x_0))$이다.

이로부터 선분 PQ의 길이의 제곱을 $h(x_0)$라 하면

$h(x_0)=\dfrac{|f(x_0)-x_0f'(x_0)|^2}{|f'(x_0)|^2}\left(1+(f'(x_0))^2\right)$ $(0<x_0<1)$을 얻는다.

한편 $|f(x_0)-x_0f'(x_0)|=\left|(1-x_0^n)^{\frac{1}{n}}+x_0^n(1-x_0^n)^{\frac{1-n}{n}}\right|=(1-x_0^n)^{\frac{1-n}{n}}$, $|f'(x_0)|=(1-x_0^n)^{\frac{1-n}{n}}x_0^{n-1}$이므로 정리하면

$h(x_0)=\left(\dfrac{1}{x_0}\right)^{2(n-1)}+(1-x_0^n)^{\frac{2(1-n)}{n}}$

선분 PQ의 길이의 최솟값을 찾기 위해서는 구간 $(0,1)$에서의 $h(x)$의 최솟값을 찾으면 충분하다.

x가 0또는 1로 수렴함에 따라 $h(x)$는 양의 무한대로 발산한다.

또한 $h'(x)=2(1-n)(x^{1-2n}-(1-x^n)^{\frac{2-3n}{n}}x^{n-1})$이므로, $0<x<1$일 때

$$h'(x)>0 \Leftrightarrow x^{1-2n}-(1-x^n)^{\frac{2-3n}{n}}x^{n-1}<0\ (n\ge 3\text{이므로}) \Leftrightarrow x^{2-3n}-(1-x^n)^{\frac{2-3n}{n}}<0 \Leftrightarrow x^{2-3n}<(1-x^n)^{\frac{2-3n}{n}}$$

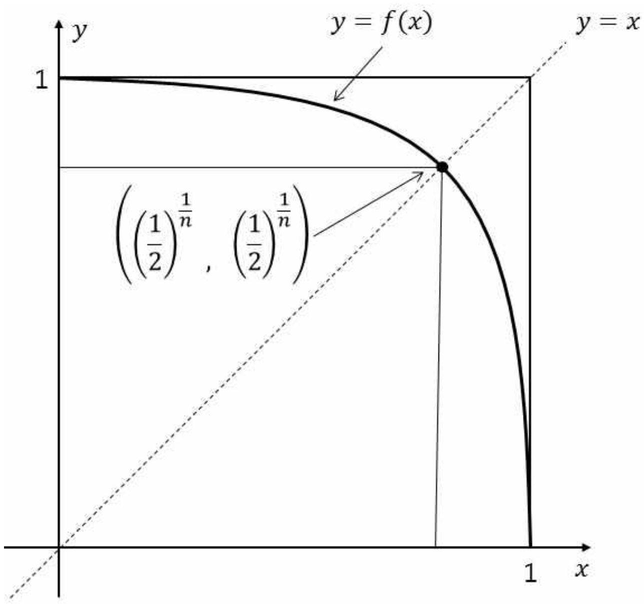
$$\Leftrightarrow x>(1-x^n)^{\frac{1}{n}}\ (n\ge 3\text{이므로}) \Leftrightarrow x^n>1-x^n \Leftrightarrow x^n>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

비슷한 방법으로 $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$, 그리고 $h'(x)<0 \Leftrightarrow x<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$임을 확인할 수 있다.

따라서 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$에서 $h(x)$가 최소가 되고 $h\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=2\cdot 4^{\frac{n-1}{n}}$이다.

선분 PQ의 길이의 최솟값은 $h\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$의 양의 제곱근인 $\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{n-1}{n}}$ 이다.

3.



$0<x<1$일 때 $f(x)>0$, $f'(x)<0$이고, $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

따라서 $0<x<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$이면 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}<f(x)<1$이다. 이로부터

(한 변의 길이가 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$인 정사각형의 넓이) $=\int_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}dx$

$\leq\int_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}f(x)dx\leq\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(1-x^n)^{\frac{1}{n}}dx\leq\int_0^1 1dx$

$=$ (한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이)

를 얻는다. 정리하면 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{n}}\leq d_n\leq 1$

이 때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{n}}=1$이므로 제시문 <다>에 의해 $\lim_{n\to\infty}d_n=1$