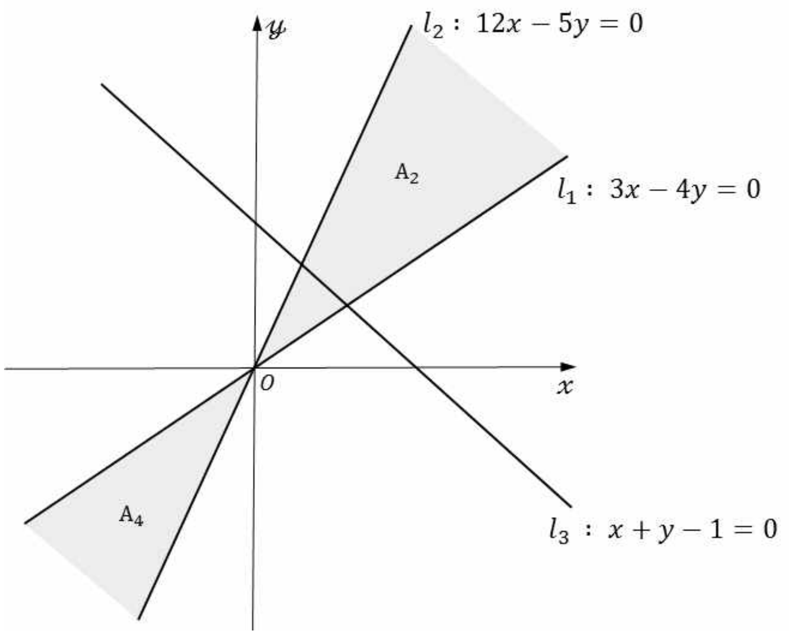
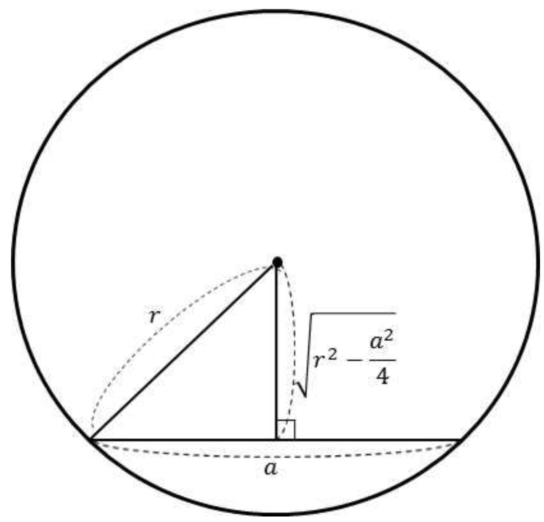
한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	의예-1번





제시문의 조건을 만족하는 원의 중심점을 (x,y), 반지름을 r이라 하고,
점과 직선사이의 거리공식을 적용하면,

$$\frac{|3x-4y|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}},\ \frac{|12x-5y|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}},\ \frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{r^2-\frac{b^2}{4}}\quad \left(r>\frac{a}{2}, r>\frac{b}{2}\right)$$

이 성립한다.

위의 세 식들을 연립하여 $\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$ 에 대한 2차방정식을 유도하여 $\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$ 의 값을 살펴보도록 한다.

1. $(x,y)\in A_4$ 이면 $3x-4y=5\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$, $12x-5y=-13\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$ 이므로 두 식을 연립하면

$x=-\frac{7}{3}\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$, $y=-3\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$ 이다.

따라서 $|x+y-1|=\left|\frac{16}{3}\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}+1\right|=\sqrt{2}\sqrt{r^2-\frac{b^2}{4}}$ 이 성립한다.

위의 등식에서 양변에 3을 곱한 후 제곱하면,

$$256\left(r^2-\frac{a^2}{4}\right)+96\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}+9=18\left(r^2-\frac{b^2}{4}\right)=18\left(r^2-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2-b^2}{4}\right)\text{이므로}$$

$$238\left(r^2-\frac{a^2}{4}\right)+96\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}+9\left(1+\frac{1}{2}(b^2-a^2)\right)=0\quad \cdots\cdots (1)$$

$X=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$ 으로 놓으면 위의 방정식은 다음과 같이 변환된다.

$$238X^2+96X+\frac{9}{2}(2+b^2-a^2)=0\quad \cdots\cdots (1)$$

물음의 원이 존재하려면 위의 방정식은 양의 실수해를 가져야 하는데, 1차항의 계수가 양수이므로,
양의 실수해가 존재한다면 단 한개만 가져야하고 이는 $2+b^2-a^2<0$ 일 때만 가능하다. ⋯⋯ ★

$\therefore 2+b^2-a^2<0$

2. $a=2.57$, $b=1.06$ 이면 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 이고 $a+b>1.5$, $a-b>1.5$ 이므로 $a^2-b^2>2$ 이다.
따라서 $a=2.57$, $b=1.06$ 이면 문항 1에서 도출된 조건을 만족시키는데,
★에 의해 제시문의 원들 중 중심이 영역 A_4 의 내부에 있는 원은 1개이다.

3. $(x,y)\in A_2$ 이면 $3x-4y=-5\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$, $12x-5y=13\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$ 이므로, 두 식을 연립하면

$x=\frac{7}{3}\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$, $y=3\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$ 이다. …… (2)

따라서 $|x+y-1|=\left|\frac{16}{3}\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}-1\right|=\sqrt{2}\sqrt{r^2-\frac{b^2}{4}}$,

$256\left(r^2-\frac{a^2}{4}\right)-96\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}+9=18\left(r^2-\frac{b^2}{4}\right)=18\left(r^2-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2-b^2}{4}\right)$,

$238\left(r^2-\frac{a^2}{4}\right)-96\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}+9\left(1+\frac{1}{2}(b^2-a^2)\right)=0$

$X=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$ 으로 놓으면 다음의 2차방정식을 얻는다.

$238X^2-96X+\frac{9}{2}(2+b^2-a^2)=0$ …… (3)

한편 $(x,y)\not\in A_4$ 이므로 문항 1에서 도출된 조건에 의해 $2+b^2-a^2\geq 0$ 이 성립해야한다.
그러므로 방정식(3)의 양인 실수해는 다음의 두 가지 경우로 나누어서 구할 수 있다.

경우 1) $2+b^2-a^2=0$ 일 때

$238X^2-96X+0=0$ 이므로 $\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}=X=\frac{48}{119}$ 이고,

이를 식 (2)에 대입하면 $x=\frac{16}{17}$, $y=\frac{144}{119}$ 이다.

case 2) $2+b^2-a^2>0$ 일 때

문항에서는 중심이 영역 A_2안에 있는 원이 단 하나 존재하도록 a, b가 선택되었다 했으므로,
방정식 (3) 의 양의 실수해는 하나만 존재해야한다. 방정식 (3) 의 상수항은 양수이고 일차항의 계수가 음수이므로 양의 실수해가 하나만 존재하기 위해서는 방정식(3)은 중근을 가져야한다.

따라서, $\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}=X=\frac{1}{2}\times\frac{96}{238}=\frac{24}{119}$ 이 성립해야하고,

이를 식(2)에 대입하면

$x=\frac{8}{17}$, $y=\frac{72}{119}$

∴ 문항에서 요구하는 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{16}{17},\frac{144}{119}\right)$ 이거나 $\left(\frac{8}{17},\frac{72}{119}\right)$이다.

한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후-의예과-2번

1. 함수 $f(x)=\sin x$는 미분 가능하므로,

평균값 정리에 의해 $a<x<b$인 실수 x에 대하여 $\sin b-\sin x=(\cos\alpha)(b-x)$인 $\alpha\in(x,b)$가 존재한다.

또한, $f'(x)=\cos x$는 구간 $[0,\pi]$에서 감소하므로, $\cos a \ge \cos\alpha \ge \cos b$가 성립한다.

그런데, $b-x>0$이므로, $(b-x)\cos a \ge (b-x)\cos\alpha = \sin b-\sin x \ge (b-x)\cos b$이다.

각 변을 a에서 b까지 적분하면, $\int_a^b (b-x)\cos b\,dx \le \int_a^b(\sin b-\sin x)dx \le \int_a^b (b-x)\cos a\,dx$ 이다.

그러므로 $\frac{1}{2}(b-a)^2\cos b \le \int_a^b(\sin b-\sin x)dx \le \frac{1}{2}(b-a)^2\cos a$ 이다.

2. $d_1=\frac{3}{2}$, $d_k-d_{k-1}=\frac{1}{k+1}$ 이다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d_k}{k}-\frac{d_k}{k+1}\right)=(d_1-\frac{d_1}{2})+(\frac{d_2}{2}-\frac{d_2}{3})+\cdots+(\frac{d_n}{n}-\frac{d_n}{n+1})\\ &= d_1+\frac{1}{2}(d_2-d_1)+\frac{1}{3}(d_3-d_2)+\cdots+\frac{1}{n}(d_n-d_{n-1})-\frac{d_n}{n+1}\\ &= \frac{3}{2}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})-\frac{d_n}{n+1}\\ &= 2-\frac{1}{n+1}-\frac{d_n}{n+1}\end{aligned}$$

부등식 $\ln(n+1)=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx \le d_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} \le 1+\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=1+\ln(n+1)$이 성립하므로,

각 변을 $n+1$로 나누고 극한 $\lim_{n\to\infty}$을 취하면, $0=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1} \le \lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{n+1} \le \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)=0$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{n+1}=0$이므로, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{k(k+1)}=2$이다.

3. $q(x)=(1-x)^{m-1}(1+x)^n$의 x^k의 계수를 b_k $(0\le k\le m+n-1)$,

$r(x)=(1-x)^m(1+x)^{n-1}$의 x^k의 계수를 c_k $(0\le k\le m+n-1)$이라 하자.

그러면 $p(x)=q(x)-xq(x)=r(x)+xr(x)$임을 알 수 있다.

위의 등식에서 $x^k\,(0\le k\le m+n)$의 계수를 비교하면, $a_k=b_k-b_{k-1}=c_k+c_{k-1}$ …… (1)

$p(x)=\sum_{k=0}^{m+n}a_kx^k=(1-x)^m(1+x)^n$라 놓고, 양변을 미분하면

$$p'(x)=\sum_{k=1}^{m+n}ka_kx^{k-1} = -m(1-x)^{m-1}(1+x)^n+n(1-x)^m(1+x)^{n-1} = -mq(x)+nr(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m+n}ka_kx^{k-1}=-m\sum_{k=0}^{m+n-1}b_kx^k+n\sum_{k=0}^{m+n-1}c_kx^k$$

위 등식에서 $x^{k-1}\,(1\le k\le m+n)$의 계수를 비교하면, $ka_k=-mb_{k-1}+nc_{k-1}$ …… (2)

이항정리를 이용하면, $p(x)$의 x^{m+n}의 계수는 $a_{m+n}=(-1)^m\times 1^n=(-1)^m\ne 0$임을 알 수 있다.

어떤 $k\in\{0,1,\cdots,m+n-2\}$에 대하여 $a_k=a_{k+1}=0$이라고 가정하자.

$a_k = a_{k+1} = 0$인 $k \in \{0, 1, \cdots, m+n-2\}$에 대하여, 식 (1)에 의하여

$$b_k - b_{k-1} = 0 \ \cdots\cdots \ ① \qquad c_k + c_{k-1} = 0 \ \cdots\cdots \ ②$$
$$b_{k+1} - b_k = 0 \ \cdots\cdots \ ③ \qquad c_{k+1} + c_k = 0 \ \cdots\cdots \ ④$$

식 (2)에 의해, $-mb_{k-1} + nc_{k-1} = 0 \ \cdots\cdots$ ⑤, $-mb_k + nc_k = 0 \ \cdots\cdots$ ⑥

$$mb_k + nc_k = mb_k + n(-c_{k-1}) \qquad (\because \ ② \ c_k = -c_{k-1})$$
$$= mb_{k-1} - mb_{k-1} = 0 \ \cdots\cdots \ ⑦ \qquad (\because \ ① \ b_k = b_{k-1} \quad ⑤ \ -nc_{k-1} = -mb_{k-1})$$

식 ⑥과 식 ⑦을 연립하여 풀면 $b_k = c_k = 0$이고, 식 ③과 식 ④로부터 $b_{k+1} = c_{k+1} = 0$임을 알 수 있다.

식 (2) 에 의해, $(k+2)a_{k+2} = -mb_{k+1} + nc_{k+1} = 0$. 따라서 $a_{k+2} = 0$이다.

$a_{k+1} = a_{k+2} = 0$이므로, 같은 방법으로 $b_{k+2} = c_{k+2} = 0$과 $a_{k+3} = 0$을 얻는다.

같은 방법으로 계속하면, $l \geq k$ 에 대하여 $a_l = 0$을 얻는다. 즉, $a_k = a_{k+1} = \cdots = a_{m+n} = 0$이다.

그런데, $a_{m+n} \neq 0$이므로, 모순이다. 그러므로 $a_k = a_{k+1}$인 $k \in \{0, 1, \cdots, m+n-1\}$는 존재하지 않는다.