**한양대학교 2023학년도 신입학전형 수시**

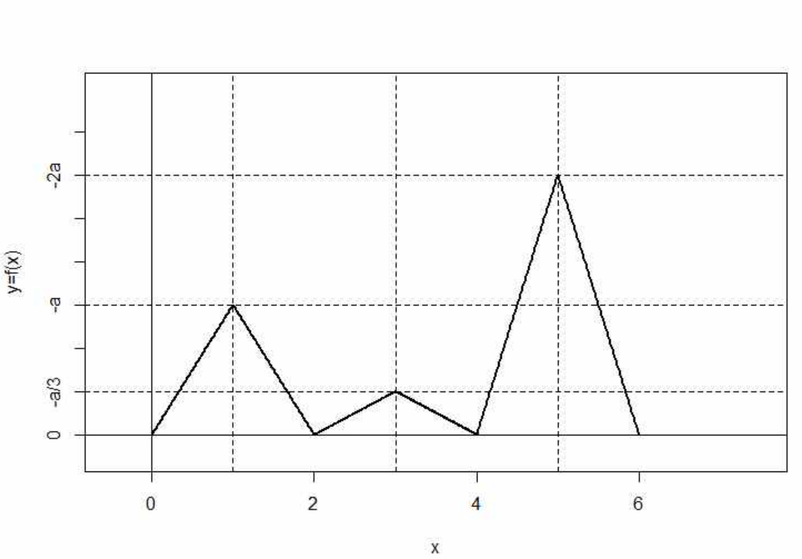
| 상경 계열 | **모 의 논 술 예 시 답 안** | 2번 |
|---|---|---|

1. 1부터 6까지의 숫자를 3개의 순서쌍으로 나누어 $(a_1, a_2), (a_3, a_4), (a_5, a_6)$라 하고, 각각의 순서쌍을 서로 마주보는 면에 적는다고 가정하자. 그러면 $X$의 기댓값은 $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)/3 = 7$로 항상 일정하게 됨을 알 수 있다. 따라서 $X$의 분산은 $[(a_1 + a_2 - 7)^2 + (a_3 + a_4 - 7)^2 + (a_5 + a_6 - 7)^2]/3$이 되는데, 이를 계산해 보면

$$\frac{1}{3}[(a_1 + a_2 - 7)^2 + (a_3 + a_4 - 7)^2 + (a_5 + a_6 - 7)^2] = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{6} a_i^2 + \frac{2}{3}(a_1 a_2 + a_3 a_4 + a_5 a_6) - \frac{14}{3}\sum_{i=1}^{6} a_i + 49$$

를 얻는다. 여기서 $\sum_{i=1}^{6} a_i^2 = 91$, $\sum_{i=1}^{6} a_i = 21$로 고정이므로 $a_1 a_2 + a_3 a_4 + a_5 a_6$의 최댓값을 구하면 되는데, 경우를 나누어 생각하면 각각의 $a_i = i$일 때 44가 최댓값임을 알 수 있다. 따라서 분산의 최댓값은 32/3이다.

2. 확률밀도함수는 항상 0보다 크거나 같으므로 $a \le 0$임을 알 수 있다. 조건 (가)에서 $f(0) = f(2) = 0$이고, 조건 (나)에서 $f(x) = \frac{1}{3}f(4-x)$이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프의 $2 \le x \le 4$인 부분은 $0 \le x \le 2$인 부분을 $y$축에 대하여 대칭이동한 후 $x$축의 방향으로 4만큼 평행 이동한 다음 함숫값을 $\frac{1}{3}$배 한 것이다. 마찬가지로 조건 (다)에서 $f(x) = 2f(6-x)$이므로 $y = f(x)$의 그래프의 $4 \le x \le 6$인 부분은 $0 \le x \le 2$인 부분을 $y$축에 대하여 대칭이동한 후 $x$축의 방향으로 6만큼 평행 이동한 다음 함숫값을 2배 한 것이다. 따라서 확률밀도함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.




이때 확률밀도함수 $y = f(x)$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2} \times 2 \times (-a) + \frac{1}{2} \times 2 \times \left(-\frac{a}{3}\right) + \frac{1}{2} \times 2 \times (-2a) = 1$에서 $a = -\frac{3}{10} = -0.3$이다.

따라서 $0 \le x \le 2$일 때, $f(x) = -0.3|x-1| + 0.3$이므로

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(1.5 \le X \le 6) &= \mathrm{P}(1.5 \le X \le 2) + \mathrm{P}(2 \le X \le 4) + \mathrm{P}(4 \le X \le 6) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{20} + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{59}{80}. \end{aligned}$$

3. 사실 구하고자 하는 확률은 모든 $i=1,\dots,2022$에 대하여 $i$번째 항아리에서 무작위로 뽑은 한 개의 공이 빨간색일 확률과 동일하고 이는 수학적 귀납법을 사용하여 증명할 수 있다.

우선 $A_i$는 $i$번째 항아리에서 빨간 공을 뽑은 사건이라고 하자 ($i=1,\dots,2022$). 그러면 수학적 귀납법을 통해 다음이 성립한다.

1) $i=1$일 때, $P(A_1)=\dfrac{r}{r+b}$ 임을 손쉽게 알 수 있다.

2) $i=n$일 때, $P(A_n)=\dfrac{r}{r+b}$ 임을 가정한다.

3) $i=n+1$일 때, 조건부 확률을 이용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_{n+1}) &= \mathrm{P}(A_{n+1}\cap A_n)+\mathrm{P}(A_{n+1}\cap A_n^c)\\
&= \mathrm{P}(A_{n+1}|A_n)\times\mathrm{P}(A_n)+\mathrm{P}(A_{n+1}|A_n^c)\times\mathrm{P}(A_n^c)\\
&= \frac{r+1}{r+b+1}\times\frac{r}{r+b}+\frac{r}{r+b+1}\times\frac{b}{r+b}\\
&= \frac{r(r+b+1)}{(r+b+1)(r+b)}=\frac{r}{r+b}.
\end{aligned}$$

따라서 모든 $i=1,\dots,2022$에 대하여 $\mathrm{P}(A_i)=\dfrac{r}{r+b}$ 임을 알 수 있고 찾고자 하는 확률은 $\mathrm{P}(A_{2022})=\dfrac{r}{r+b}$ 이다.