

한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시
모의논술예시답안

상경 계열

2번

1. 동전의 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 Y 라 하면

$$X = 2^Y \left(\frac{1}{2}\right)^{8-Y} = 2^{2Y-8}, \text{ 즉, } \log_2 X = 2Y - 8$$

따라서

$$E(\log_2 X) = E(2Y - 8) = 2E(Y) - 8 = 2 \cdot 8p - 8 = 16p - 8$$

2. 동전을 던지기 전의 점수를 x 라 할 때, 던진 후의 점수의 기댓값은

$$2x \cdot p + \frac{x}{2} \cdot (1-p) = \left(2p + \frac{1}{2}(1-p)\right)x$$

게임 시작 시 1점을 부여받고, 서로 독립인 동전 던지기 시행을 8회 반복하므로

$$E(X) = \left(2p + \frac{1}{2}(1-p)\right)^8 = \frac{(3p+1)^8}{2^8}$$

주어진 조건에 의해

$$E(X) = \frac{(3p+1)^8}{2^8} = \frac{256}{6561} = \frac{2^8}{3^8}$$

따라서 $3p+1 = \frac{4}{3}$. 즉, $p = \frac{1}{9}$

3. 일반적인 p 에 대하여, 처음 4회의 동전 던지기를 한 뒤 점수가 1점 미만이면 점수를 1점으로 조정하였을 때의 확률분포는 다음과 같다.

최종 점수	16	4	1
확률	p^4	$4C_1 p^3(1-p) = 4p^3(1-p)$	$1 - p^4 - 4p^3(1-p)$

이 확률변수의 기댓값은

$$16p^4 + 4 \cdot 4p^3(1-p) + (1 - p^4 - 4p^3(1-p))$$

동전을 던지기 전의 점수를 x 라 할 때, 동전을 4회 던진 후의 점수의 기댓값은

$$\left(2p + \frac{1}{2}(1-p)\right)^4 x$$

따라서 게임의 최종 점수의 기댓값은

$$\left(2p + \frac{1}{2}(1-p)\right)^4 [16p^4 + 4 \cdot 4p^3(1-p) + (1 - p^4 - 4p^3(1-p))]$$

$p = \frac{1}{2}$ 일 때, 이 값은

$$\left(\frac{5}{4}\right)^4 \left(1 + 1 + \frac{11}{16}\right) = \frac{625}{256} \cdot \frac{43}{16} = \frac{26875}{4096}$$