한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시

자연 계열 | **모 의 논 술 예 시 답 안** | 1번

1. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 의 그래프를 생각하면, 다음 부등식이 성립한다.

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \le 1+\int_1^{n}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \quad \Rightarrow \quad 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \le 1+2\left(\sqrt{n}-1\right)$$

각 변에 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 을 곱한 후에 극한 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 을 취하면,

$$2=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{n+1}-1\right)}{\sqrt{n}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1+2\left(\sqrt{n}-1\right)}{\sqrt{n}}=2\text{이다.}$$

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}=2$ 이다.

2. 첫 번째로 주어진 급수를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx=\sum_{k=1}^{n} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{1}{n}\right)$$

따라서 제시문 (나)에 의해 구하고자 하는 극한값은 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\int_0^1 x^4\,dx=\frac{1}{10}$$

동일한 방식으로 두 번째 극한값을 아래와 같이 계산 가능하다.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{1}{2n^2}\right)\right]=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}\int_0^1 x^4\,dx=\frac{1}{10}$$

3. 제시문 (다)에 의해 아래의 등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-n\int_0^1 f(x)\,dx=n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx=n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)dx$$

여기서 $f(x)=x^5$ 이라 하자. 그러면 $f(x)$ 는 연속이고 미분가능한 함수이므로, 평균값 정리에 의해

$\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)dx=\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(\theta_k(x))\left(\frac{k}{n}-x\right)dx$ 을 만족하는 $\theta_k(x)\in[x,\frac{k}{n}]$ 가 존재한다.

$f'(x)=5x^4$ 는 $[0,1]$ 에서 증가하므로, 모든 $x\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$ 에 대하여 $5\left(\dfrac{k-1}{n}\right)^4 \le 5x^4 \le 5\left(\dfrac{k}{n}\right)^4$ 이 성립한다.

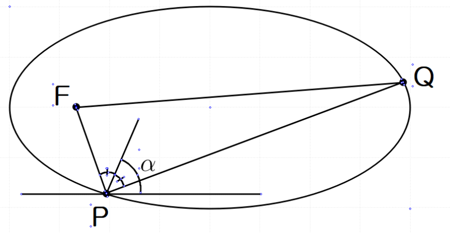
이로부터 아래와 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} 5\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx \le n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^5-x^5\right)dx \le n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} 5\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx$$

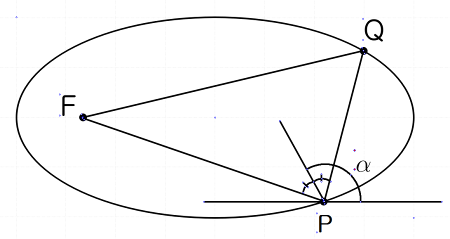
(2)번 문제에서 계산한 결과를 활용하여, 위 부등식 양쪽 끝을 $n\to\infty$ 일 때의 극한값을 계산하면 $\dfrac{1}{2}$ 로 동일함을 알 수 있다. 따라서 제시문 (가)에 의해 문제에서 구하고자 하는 극한값은 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^5-n\displaystyle\int_0^1 x^5dx\right]=\dfrac{1}{2}$ 이다.

한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시		
자연 계열	**모 의 논 술 예 시 답 안**	2번

1. 타원을 아래 그림과 같이 좌표평면에 두어 $x^2+4y^2=4$라 하자. 공이 초점 $\mathrm{F}(-\sqrt{3}, 0)$에 있고 점 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$는 x축 아래에 있다고 가정하자. 다른 초점 $\mathrm{F}'(\sqrt{3}, 0)$은 점 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$와 점 $\mathrm{Q}(x_1, y_1)$를 지나는 직선 위에 놓여 있다. 점 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$에서의 타원의 법선과 x축의 양의 방향이 이루는 각을 α라 하면, 이 법선의 기울기는 $\tan\alpha=\dfrac{4y_0}{x_0}$이다. 따라서



점 F, P 를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{y_0-0}{x_0-(-\sqrt{3})}=\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\dfrac{4y_0}{x_0}+1}{1-\dfrac{4y_0}{x_0}}$,



점 P, Q 를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{y_0-0}{x_0-\sqrt{3}}=\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\dfrac{4y_0}{x_0}-1}{1+\dfrac{4y_0}{x_0}}$ 이다.

이로부터 점 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$는 $\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 또는 $\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 이고,

점 $\mathrm{Q}(x_1, y_1)$의 y좌표는 각각 $y_1=\dfrac{\sqrt{3}}{21+12\sqrt{2}}$ 또는 $y_1=\dfrac{\sqrt{3}}{21-12\sqrt{2}}$ 이다.

따라서 삼각형 FPQ 의 넓이 = 삼각형 FPF′의 넓이 + 삼각형 FQF′의 넓이 $=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot|y_0|+\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot|y_1|$

$=\dfrac{24}{17}-\dfrac{4}{17}\sqrt{2}$ 또는 $\dfrac{24}{17}+\dfrac{4}{17}\sqrt{2}$ 이다.

2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+2x+3}=4$로부터 다항함수 $f(x)$는 $f(x)=4x^2+ax+b$라 할 수 있고, $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{f(x)}=-\frac{1}{7}$로부터 $f(x)$는 $(x+1)$을 인수로 갖는 것을 알 수 있다. $f(x)=4(x+1)(x+c)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{f(x)}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{4(x+c)}=\frac{1}{4(c-1)}=-\frac{1}{7}$이므로 $c=-\dfrac{3}{4}$가 되어 $f(x)=4x^2+x-3$이다. 따라서 $g(t)=\displaystyle\int_{-t}^{t}f(x)\,dx=\int_{-t}^{t}(4x^2+x-3)\,dx=\frac{8}{3}t^3-6t$이다.

$g'(t)=8t^2-6=8\left(t^2-\dfrac{3}{4}\right)$이므로 $g(t)$는 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$에서 극솟값을 갖는다.

$g(-2)=-\dfrac{28}{3}<-2\sqrt{3}=g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로, $g(t)$는 $t=-2$에서 최솟값 $g(-2)=-\dfrac{28}{3}$을 갖는다.

3. $f(t)=\sqrt{(-2\sin t)^2+(\cos t)^2}=\sqrt{1+3\sin^2 t}$, $g(t)=\sqrt{(-2\cos t)^2+(-\sin t)^2}=\sqrt{1+3\cos^2 t}$ 이다. $h(t)=\dfrac{f(t)}{g(t)}$ 라 하자.

$$h'(t)=\frac{\dfrac{6\sin t\cos t}{2\sqrt{1+3\sin^2 t}}\sqrt{1+3\cos^2 t}-\sqrt{1+3\sin^2 t}\,\dfrac{(-6\cos t\sin t)}{2\sqrt{1+3\cos^2 t}}}{1+3\cos^2 t}$$

$$=\frac{3\sin t\cos t\,(1+3\cos^2 t+1+3\sin^2 t)}{(1+3\cos^2 t)\sqrt{1+3\sin^2 t}\sqrt{1+3\cos^2 t}}=\frac{15\sin t\cos t}{(1+3\cos^2 t)\sqrt{1+3\sin^2 t}\sqrt{1+3\cos^2 t}}$$

$h'(t)$의 분자가 0이 되는 경우를 살펴보면, 정수 n에 대하여 $h'\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)=0$이므로 $t=\dfrac{n\pi}{2}$에서 극값을 갖는다.

정수 n에 대하여 $t=n\pi$에서 극솟값 $h(n\pi)=\dfrac{1}{2}$, $t=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$에서 극댓값 $h\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=2$을 가지고, 실수 t에 대해서 $\dfrac{1}{2}\le h(t)\le 2$를 만족한다. 따라서 $0\le t\le 2$인 t에 대하여 $h(t)$는 최솟값 $h(0)=\dfrac{1}{2}$, 최댓값 $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$를 갖는다.