

1. 제시문 (가)에서 주어진 함수  $f(x)$ 의 정의역은  $\{x \leq -1 \text{ or } 3 \geq x\}$ 이다. 문제에서 주어진  $x$ 의 범위와 교집합을 고려하면,  $\{-5 \leq x \leq -1 \text{ or } 3 \leq x \leq 7\}$ 이고 가능한 정수는  $-5, -4, -3, -2, -1, 3, 4, 5, 6, 7$ 이다. 각 정수에 대응하는  $0 \leq y \leq f(x)$  범위와 각 범위에 속하는 정수는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq f(-5) = \sqrt{4} = 2 &\Rightarrow y = 0, 1, 2 \\ 0 \leq y \leq f(-4) = \sqrt{3} &\Rightarrow y = 0, 1 \\ 0 \leq y \leq f(-3) = \sqrt{2} &\Rightarrow y = 0, 1 \\ 0 \leq y \leq f(-2) = \sqrt{1} = 1 &\Rightarrow y = 0, 1 \\ 0 \leq y \leq f(-1) = \sqrt{0} = 0 &\Rightarrow y = 0 \\ 0 \leq y \leq f(3) = \sqrt{0} = 0 &\Rightarrow y = 0 \\ 0 \leq y \leq f(4) = \sqrt{1} = 1 &\Rightarrow y = 0, 1 \\ 0 \leq y \leq f(5) = \sqrt{2} &\Rightarrow y = 0, 1 \\ 0 \leq y \leq f(6) = \sqrt{3} &\Rightarrow y = 0, 1 \\ 0 \leq y \leq f(7) = \sqrt{4} = 2 &\Rightarrow y = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

정답: 20개

2. 제시문 (나)에서 주어진 함수  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ 와 함수  $g(x) = \sqrt{2|x|}$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하기 위해 우선 함수  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ 와 함수  $h(x) = \sqrt{2x}$ 가 역함수 관계인 것을 파악하자. 이 두 함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 다음과 같이 구할 수 있다.

두 함수의 두 교점은  $(0,0), (2,2)$ 임을 쉽게 확인 가능하다. 따라서 도형의 넓이는  $A = 2 \times \int_0^2 (x - \frac{x^2}{2}) dx$ 로 계산가능하다.

$$2 \times \int_0^2 (x - \frac{x^2}{2}) dx = 2 \left[ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^2 = 2(2 - \frac{4}{3}) = \frac{4}{3}$$

$g(x)$ 의 그래프는  $h(x)$ 의 그래프와  $h(x)$ 의 그래프를  $y$ 축으로 대칭한 그래프의 합이고,  $f(x)$ 의 그래프는  $y$ 축 대칭이므로 구하고자 하는 도형의 넓이는  $2A = \frac{8}{3}$  이다.

정답:  $\frac{8}{3}$

3. 함수  $f(x) = \sqrt{||x-1|-1|-1}$ 의 제곱근 내의 값이 0보다 크거나 같아야하므로 정의역은  $||x-1|-1|-1 \geq 0$ 이다. 즉,  $|x-1|-1 \geq 1$  or  $|x-1|-1 \leq -1$ 이고, 이는 다시  $(|x-1|-1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 3 \text{ or } x \leq -1)$  or  $|x-1| \leq 0$ 로 쓸 수 있다. 정리하면, 정의역은  $\{x \leq -1, x = 1, x \geq 3\}$ 이다. 따라서, 함수  $f(x)$ 는 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x-1} & \text{if } x \leq -1 \\ 0 & \text{if } x = 1 \\ \sqrt{x-3} & \text{if } x \geq 3 \end{cases}$$

함수  $f(x)$ 의 그래프를 그려보면 함수  $g(x) = -x^2 + 1$ 의 그래프와는 두 점  $(-1, 0), (1, 0)$ 에서 만난다는 것을 알 수 있다. 따라서, 두 함수의 교점의 개수  $n$ 은 2이다.  $f(x) = 2$ 의 근이  $-5, 7$ 이므로 구하고자하는 두 점 P, Q는  $(-5, 2), (7, 2)$ 이다. 따라서, P, Q사이의 거리는 12이다.

정답: 12