한양대학교 2020학년도 신입학전형 수시

상 경 계	모 의 논 술 예 시 답 안	2 번

1. 드모르간의 법칙에 의해 $C\cap(A^c\cup B)=C\cap(A\cap B^c)^c=C-(A-B)=\{2,4,7RIGHT$이고, $A-B=\{1,3,5RIGHT$이다. 따라서 집합 C는 $C\subset\{1,2,3,4,5,7RIGHT$, $\{2,4,7RIGHT\subset C$를 동시에 만족한다. 따라서 집합 C는 다음과 같은 경우를 만족한다.

C	$n(C)$
$\{2,4,7RIGHT$	3
$\{1,2,4,7RIGHT$	4
$\{2,3,4,7RIGHT$	4
$\{2,4,5,7RIGHT$	4
$\{1,2,3,4,7RIGHT$	5
$\{1,2,4,5,7RIGHT$	5
$\{2,3,4,5,7RIGHT$	5
$\{1,2,3,4,5,7RIGHT$	6

따라서 확률변수 X는 다음과 같은 확률분포를 갖는다.

X	3	4	5	6	합계
$p(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

기댓값은 $\mathrm{E}(X)=3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{3}{8}+5\cdot\frac{3}{8}+6\cdot\frac{1}{8}=\frac{9}{2}$ 이다.

분산은 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\left\{\mathrm{E}(X)RIGHT=3^2\cdot\frac{1}{8}+4^2\cdot\frac{3}{8}+5^2\cdot\frac{3}{8}+6^2\cdot\frac{1}{8}-(\frac{9}{2})^2=\frac{3}{4}\right.$ 이다.

2. 주어진 정적분을 구하면

$$\int_0^6(x^3-(12-k)x^2+6(6-k)x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{12-k}{3}x^3+3(6-k)x^2RIGHT\right]_0^6=108-36k\text{이다.}$$

따라서 $k=1,2$일 때, 정적분의 값이 양수가 되므로 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다. 정적분이 양수가 되는 확률변수를 X라고 하면, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(4050,\frac{1}{3}\right)$를 따른다. 시행횟수 $n=4050$이 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(1350,30^2)$를 따른다. 이를 이용하면

$$\mathrm{P}(1365\le X\le 1410)=\mathrm{P}\left(\frac{1365-1350}{30}\le\frac{X-1350}{30}\le\frac{1410-1350}{30}\right)$$
$$=\mathrm{P}(0.5\le Z\le 2)=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.4772-0.1915=0.2857$$

을 얻는다.

3. 두 항을 나누어 생각하자. 첫 번째 급수는 첫째항이 2, 공비가 $-\dfrac{1}{3}$인 등비급수이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left[2-\frac{2}{3}+\frac{2}{9}-\frac{2}{27}+\cdots+\frac{2}{(-3)^{n-1}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} = \frac{2}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}=\frac{3}{2}$$ 이다.

두 번째 극한은 정적분을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^5}+\frac{16}{n^5}+\frac{81}{n^5}+\cdots+\frac{n^4}{n^5}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^5}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\frac{1}{n} = \int_0^1 (x^4)\,dx=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{1}{5}$$

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴할 때 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 이므로 주어진 극한은 $\dfrac{17}{10}$이다.