한양대학교 2020학년도 신입학전형 수시

자 연 계	모 의 논 술 예 시 답 안	1 번

1. $\tan\alpha_n = \dfrac{n-(n-1)}{\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{2}n(n-1)} = \dfrac{1}{n}$ 이므로, $\tan\alpha_2 = \dfrac{1}{2}$, $\tan\alpha_3 = \dfrac{1}{3}$ 이다.

   따라서 $\tan(\alpha_2+\alpha_3) = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$ 이고, $\alpha_2+\alpha_3$ 는 예각이므로 $\alpha_2+\alpha_3 = \dfrac{\pi}{4}$ ($=45^\circ$) 이다.

2. $\alpha_k = \alpha_n + \alpha_m$ 이면, $\tan\alpha_k = \tan(\alpha_n+\alpha_m)$, $\dfrac{1}{k} = \dfrac{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}{1-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}}$ 이 성립한다. 정리하면,

   $(n-k)(m-k) = 1+k^2$ 이고, 자연수 k 에 대해 이 등식을 만족시키고 $n<m$ 인 순서쌍 (n, m) 의 개수는 $1 \le k \le 6$ 일 때, 1 또는 2 이다.
   $k=7$ 이면 $(n-7)(m-7) = 1+7^2 = 50$ 을 만족시키고 $n<m$ 인 순서쌍 $(n-7,\ m-7)$ 은 $(1, 50)$, $(2, 25)$, $(5, 10)$ 으로 3 개 있다.
   따라서 $f(k)=3$ 을 만족시키는 가장 작은 자연수는 7 이고, 이 때 순서쌍 (n, m) 은 $(8, 57)$, $(9, 32)$, $(12, 17)$ 이다.

3. 직선 L_n 은 $n-1$ 개의 직선 $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ 과 서로 다른 점에서 각각 한 번씩 만난다. 따라서 $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ 에 의해 나뉘는 평면에 L_n 을 그리면 n 개의 영역이 추가된다. 즉, $n \ge 2$ 인 자연수 n 에 대하여 $g(n) = g(n-1)+n$ 이 성립한다. 이 등식에 $n = 2, 3, \ldots, n$ 을 대입하고 변변 더해서 정리하면, $g(n) = \dfrac{1}{2}(n^2+n+2)$ 를 얻는다. $g(63) = 2017 < 2020$, $g(64) = 2081 > 2020$ 이므로, $g(n) > 2020$ 을 만족시키는 가장 작은 자연수 n 은 64 이다.

한양대학교 2020학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	2 번

1. $a_2 = \dfrac{a_0 + a_1}{2}$, $a_3 = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$, $a_4 = \dfrac{a_2 + a_3}{2}$, $\cdots$

$a_2 - a_1 = \dfrac{a_0 - a_1}{2}$, $a_3 - a_2 = \dfrac{a_1 - a_2}{2}$, $a_4 - a_3 = \dfrac{a_2 - a_3}{2}$, $\cdots$

$a_2 - a_1 = -\dfrac{a_1 - a_0}{2}$, $a_3 - a_2 = -\dfrac{a_2 - a_1}{2} = \dfrac{a_1 - a_0}{2^2}$, $a_4 - a_3 = -\dfrac{a_1 - a_0}{2^3}$, $\cdots$

자연수 $n \geq 2$에 대하여

$$a_n - a_1 = -\frac{a_1 - a_0}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{1}{2^{n-2}}\right) = \frac{a_1 - a_0}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1\right)$$

$a_n = \dfrac{2a_1 + a_0}{3} + (-1)^{n-1}\dfrac{a_1 - a_0}{3 \cdot 2^{n-1}}$ 이므로, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{2a_1 + a_0}{3} = \frac{40 + 5}{3} = 15$ 이다.

2. $(1-2x)^n = (1-x-x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(-x)^k(1-x)^{n-k}$ 이므로,

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(-1)^k \int_{-1}^{2} x^k(1-x)^{n-k}dx = \int_{-1}^{2}(1-2x)^n dx$ 이다.

위의 적분에서 $1-2x = u$로 치환하면, $\displaystyle\int_{-1}^{2}(1-2x)^n dx = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3} u^n du = \begin{cases} 0, & n = \text{홀수} \\ \dfrac{3^{n+1}}{n+1}, & n = \text{짝수} \end{cases}$ 이다.

3. 주어진 두 조건을 만족하려면 타원위의 점 (x,y)로부터 $(t,0)$까지의 거리가 r보다는 크거나 같아야 한다.

즉, $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ (x-t)^2 + y^2 \geq r^2 \end{cases}$ 이 성립한다. 점 (x,y)가 원과 타원의 교점이라면, $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ (x-t)^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$ 이 성립한다.

연립하여 x에 관한 식으로 정리하면, $\dfrac{1}{2}x^2 - 2tx + t^2 - r^2 + \dfrac{1}{2} = 0$ ----- ① 이다.

문제의 조건을 만족하려면, 연립방정식의 근이 중근으로 나타나야 한다.

따라서 식 ①에서 x에 관한 판별식이 0이므로, 계산하면,

$$D/4 = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad r(t) = \sqrt{\frac{1}{2} - t^2}$$

구하고자 하는 적분값을 계산하면 다음과 같다.

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} r(t)\,dt = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} \sqrt{\frac{1}{2} - t^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin^2\theta}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1)\,d\theta = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta + \theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi}{24}$$