	한양대학교 2020학년도 신입학전형 수시	
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	1 번

1. 음함수의 미분법에 의해 $(3y^2+6y+4)y'=1$, 즉 $y' = \dfrac{1}{3y^2+6y+4} = \dfrac{1}{3(y+1)^2+1} > 0$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 증가함수이고 일대일 함수이다.

2. 함수 $g(x)$와 $h(x)$가 한 점에서 만날 조건은 함수 $g(x)$가 함수 $y=x$와 만날 조건과 동치이다.
$g(x)$의 정의에 의해

$$g(x)^3+3g(x)^2+4g(x)+1=f(x+k)^3+3f(x+k)^2+4f(x+k)+1=x+k$$

이므로, $g(x)=x$가 $g(x)$의 정의역 $\{x|x \geq -k\}$에서 해를 가질 조건은 삼차 방정식 $x^3+3x^2+4x+1=x+k$,
즉, $x^3+3x^2+3x+(1-k)=0$이 $\{x|x \geq -k\}$에서 해를 가질 조건과 같다.
$p(x)=x^3+3x^2+3x+(1-k)$ $(x \geq -k)$라 두자. $p'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2 \geq 0$이므로 $p(x)$는 증가함수이다.
따라서 $p(x)=0$이고 $x \geq -k$인 x가 한 개 이상 존재하기 위해서는 $p(-k)=-k^3+3k^2-4k+1 \leq 0$ 이어야만 한다. $q(k)=-k^3+3k^2-4k+1$이라 두면, $q'(k) = -3k^2+6k-4=-3(k-1)^2-1 \leq 0$이므로 감소함수이다.
그런데 $q(0.3)=0.043>0$ 이고 $q(0.4) = -0.184 < 0$ 이므로 $q(k) \leq 0$인 k의 최솟값은 0.3...이다.
따라서 구하는 답은 3이다.

3. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{Q}(-1,-1)$에서 그은 접선의 방정식은 $y=f'(-1)(x+1)-1=-x$이다.
따라서 R의 좌표는 (0,0)이다.
한편, $f(x)$의 역함수를 $r(x)$라 하면 $r(x)=x^3+3x^2+4x+1$이다. 또한 $r(x) \geq x$가 $(x+1)^3 \geq 0$과 동치이므로 구간 $[-1,0]$에서 $r(x) \geq x$, 즉, $x \geq f(x)$가 성립한다. 이로부터 S를 좌표가 $(0,-1)$인 점이라 하면

(선분 PR, 선분 QR와 곡선 $y=f(x)$에 의해 둘러싸인 영역의 넓이)

$= $ (삼각형 QRS의 넓이) $- \displaystyle\int_{-1}^{a} |r(x)|dx = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 + \int_{-1}^{a}(x^3+3x^2+4x+1)dx$

$= \dfrac{a^4}{4}+a^3+2a^2+a+\dfrac{1}{4}.$

그런데 a의 정의에 의해 $a^3+3a^2+4a+1=0$가 성립하므로,

$$\frac{a^4}{4}+a^3+2a^2+a+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(a^3+4a^2+3a+1)=\frac{1}{4}(a^2-a)$$

이다. 정리하면

(선분 PR, 선분 QR와 곡선 $y=f(x)$에 의해 둘러싸인 영역의 넓이) $= \dfrac{1}{4}(a^2-a)$

를 얻는다.

한양대학교 2020학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	2 번

1. $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

따라서 $a = -\frac{1}{6}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{2}{3}$, $d = -\frac{1}{6}$ 이다.

2. $\overrightarrow{GH} = r\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{FH} = s\overrightarrow{FD}$ 로 두면, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AG} + r\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AF} + s\overrightarrow{FD}$ 가 성립한다.

이 등식에 문항 1의 두 등식을 대입하여 r, s를 구하면, $r = s = \frac{3}{5}$ 이다.

따라서 $\overline{GH} : \overline{HE} = \frac{3}{5} : 1 - \frac{3}{5} = 3:2$ 이다.

3. $\overrightarrow{GI_{k+l}} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BI_{k+l}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{k+l}{n}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{k+l}{n}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$= \frac{n-2(k+l)}{2n}\overrightarrow{AB} + \frac{k+l}{n}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{FI_k} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CI_k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{n-k}{n}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{n-k}{n}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$

$= \frac{n-k}{n}\overrightarrow{AB} + \frac{-n+2k}{2n}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{GJ} = r\overrightarrow{GI_{k+l}}$, $\overrightarrow{FJ} = s\overrightarrow{FI_k}$ 로 두면, $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AG} + r\overrightarrow{GI_{k+l}} = \overrightarrow{AF} + s\overrightarrow{FI_k}$ 이다.

위 두 등식을 이것에 대입하여 r과 s를 구한다.

FG 와 BC는 평행이므로, $r = s$ 임을 이용하여 구하자.

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + s\left(\frac{n-2(k+l)}{2n}\overrightarrow{AB} + \frac{k+l}{n}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + s\left(\frac{n-k}{n}\overrightarrow{AB} + \frac{-n+2k}{2n}\overrightarrow{AC}\right)$ 이므로, $s = \frac{n}{n+2l}$ 이다.

따라서 $\overline{FJ} : \overline{JI_k} = \frac{n}{n+2l} : 1 - \frac{n}{n+2l} = n : 2l$ 이다.