

[고려대학교 문항정보]

1. 일반 정보

문항 붙임번호	14	
유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사 <input type="checkbox"/> 선다형고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(오전)/1~4번	
출제 범위	교육과정 과목명	수학, 수학II, 미적분, 확률과 통계, 기하
	핵심개념 및 용어	극한, 미분, 적분, 공간도형, 경우의 수
예상 소요 시간	80 분	

2. 문항 및 제시문

문제 1. 다음을 읽고 물음에 답하시오. (30점)

모든 항이 양수인 두 수열 a_n 과 b_n 은 다음 조건을 만족한다.

(가) $y = x^2$ 과 $y = a_n x + 1$ 로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\frac{n}{6}$ 이다. (단, n 은 10보다 큰 자연수이다.)

(나) $y = x^2$ 과 $y = b_n x + 1$ 의 두 교점 사이의 거리는 n 이다. (단, n 은 10보다 큰 자연수이다.)

1-1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{\sqrt[3]{n^2}}$ 을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

1-2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \times (a_{n+1}^2 - a_n^2)$ 을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

1-3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^2}{n}$ 을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

문제 2. 다음을 읽고 물음에 답하시오. (30점)

두 이차함수 $g(x) = -x^2 + ax + b$ 와 $h(x) = x^2 + cx + d$ 에 대하여, 함수

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}g(x) - 1 & (x \geq 0) \\ h(x) & (x < 0) \end{cases}$$

는 다음 조건을 만족한다.

(가) 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 미분가능하다.

(나) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \int_{-1}^x f(t) dt + \frac{1}{6x} \right) = 0$

참고로, 양수 x 에 대하여 $4e^{\frac{x}{4}} \geq x$ 을 이용하면, $e^x \geq \left(\frac{x}{4}\right)^4$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$ 이 된다.

- 2-1) 두 이차함수 $g(x)$ 와 $h(x)$ 를 구하고, 그 이유를 설명하십시오. (10점)
- 2-2) 곡선 $y = f(x)$ 위의 서로 다른 세 점에서의 접선이 점 $(0, k)$ 를 지나는 k 값의 범위를 구하고, 그 이유를 설명하십시오. (10점)
- 2-3) $g(x) - h(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자 (단, $\beta > \alpha$). 함수 $F(x) = \int_x^{x+(\beta-\alpha)} |g(t) - h(t)| dt$ 가 $x = x_0$ 에서 최솟값을 가질 때, x_0 와 최솟값 $F(x_0)$ 를 구하고, 그 이유를 설명하십시오. (10점)

문제 3. 다음을 읽고 물음에 답하십시오. (20점)

좌표공간에서 점 $A\left(0, 0, \frac{11}{3}\right)$ 을 지나는 직선이 구 $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 11$ 과 점 $P(a, 0, b)$ 에서 접하고, 점 $B(0, 0, 11)$ 을 지나는 직선이 구 S_1 과 점 $Q(0, c, d)$ 에서 접한다. 점 P 와 점 Q 에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 각각 R 과 S 라 하자. 또한, 점 P 와 점 Q 를 지나는 직선을 ℓ 이라 하고, 점 R 과 점 S 를 지나는 직선을 m 이라 하자. (단, a 와 c 는 양수이다.)

- 3-1) 선분 RS 의 길이와 두 직선 ℓ 과 m 이 이루는 각을 구하고, 그 이유를 설명하십시오. (10점)
- 3-2) 구 $S_2 : (x - \sqrt{2})^2 + (y - 6)^2 + (z - \sqrt{10})^2 = 4$ 와 만나고 중심이 직선 m 위에 있는 구의 부피의 최솟값을 구하고, 그 이유를 설명하십시오. (10점)

문제 4. 다음을 읽고 물음에 답하십시오. (20점)

특수문자 32개, 0부터 9까지의 숫자 10개, 대문자 26개와 소문자 26개의 알파벳을 사용하여 다섯 자리 비밀번호를 만들고자 한다. 단, 비밀번호에서 문자나 숫자의 중복을 허용하며, 알파벳 대문자와 소문자는 서로 다른 글자로 취급한다.

- 4-1) 특수문자 한 개, 알파벳 대문자 한 개, 그리고 숫자와 알파벳 소문자 중에서 세 개를 사용해서 다섯 자리 비밀번호를 만들 수 있는 모든 경우의 수는 두 개의 자연수 n 과 k 에 대하여 $n \times k^3$ 꼴로 표현이 된다. 이때, $n - k$ 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하십시오. (단, k 는 30보다 크고 40보다 작은 자연수이다.) (10점)
- 4-2) 숫자만을 사용해서 다섯 자리 비밀번호를 만들 때, 각 자리의 숫자의 합이 38이 되도록 만드는 모든 경우의 수를 구하고, 그 이유를 설명하십시오. (10점)

3. 출제 의도

- 주어진 조건이 의미하는 바를 정확히 이해하고 주어진 조건을 활용하여 물음에 대한 답을 논리적으로 설명할 수 있는 능력을 평가하고자 함
- 문항이 의도한 바를 정확하게 이해하고 주장에 대한 근거를 합리적으로 추론할 수 있는 능력을 평가하고자 함
- 수열의 극한, 접선의 방정식, 함수의 그래프 등을 종합적으로 활용하여 주어진 문제를 논리적으로 해결하는 능력을 평가하고자 함
- 공간좌표와 공간도형을 종합적으로 활용하여 주어진 문제를 논리적으로 해결하는 능력을 평가하고자 함
- 정적분을 이해하고 활용하여 문제를 논리적으로 해결하는 능력을 평가하고자 함
- 중복조합과 중복순열을 활용하여 경우의 수를 구하는 과정을 평가하고자 함

4. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	1. 교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"		
관련 성취기준	1. 교과명: 수학		
	과목명: 수학		
	성취기준	(1) 문자와 식 ④ 복소수와 이차방정식 [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. ⑤ 이차방정식과 이차함수 [10수학01-09] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다.	관련 문항 1
	과목명: 수학 II		
	성취기준	(1) 함수의 극한과 연속 ① 함수의 극한 [12수학 II 01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.	관련 문항 2
		(2) 미분 ① 미분계수 [12수학 II 02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다. ③ 도함수의 활용 [12수학 II 02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학 II 02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.	문항 1 문항 2
과목명: 미적분			
성취기준	(1) 수열의 극한 ① 수열의 극한 [12미적01-01] 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.	관련 문항 1	

[고려대학교 문항정보]

1. 일반 정보

문항 붙임번호	15	
유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사 <input type="checkbox"/> 선다형고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(오후)/1~4번	
출제 범위	교육과정 과목명	수학, 수학II, 미적분, 기하
	핵심개념 및 용어	극한, 미분, 적분, 이차곡선, 경우의 수
예상 소요 시간	80 분	

2. 문항 및 제시문

문제 1. 다음을 읽고 물음에 답하시오. (30점)

20 이상의 자연수 n 에 대하여, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 다음 조건을 만족한다.

(가) $0 < a < 1$

(나) 두 점 $(-1, 1)$ 과 $(0, 1)$ 을 지난다.

(다) 두 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 와 $y = x^2$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이는 n 이다.

이때, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 꼭짓점의 y 좌표를 y_n 이라 하고, 두 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 와 $y = x^2$ 의 교점 중 $(-1, 1)$ 이 아닌 점을 (d_n, d_n^2) 이라 하자. 참고로, $d_n \geq \sqrt{2n}$ 이다.

1-1) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

1-2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n^2}{n}$ 을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

1-3) $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{n+1}(d_{n+1} - d_n)$ 을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

문제 2. 다음을 읽고 물음에 답하십시오. (30점)

삼차함수 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 가 다음 조건을 만족한다.

(가) 모든 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이다.

(나) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x) - 2f(0)}{x^2} = 0$

(다) 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2g(x)}{x} = 1$ 이다.

2-1) $f\left(\frac{d}{2}\right)$ 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하십시오. (10점)

2-2) 함수 $f(x)$ 를 구하고, 그 이유를 설명하십시오. (10점)

2-3) $\int_{-3}^3 x(f(x) + 1)g(x)dx$ 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하십시오. (10점)

문제 3. 다음을 읽고 물음에 답하십시오. (20점)

세 실수 a, b, c 와 세 점 $A(c,0), B(-c,0), O(0,0)$ 에 대하여, $|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}| = b$ 를 만족하는 점 P 의 집합이 나타내는 곡선 C 와 직선 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + a$ 는 만나지 않는다. 곡선 C 위의 점 P 와 직선 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + a$ 사이의 거리가 최소일 때 점 P 의 x 좌표를 x_1 이라 하고, 거리가 최대일 때 x 좌표를 x_2 라 하자. (단, $b > 2c \geq 0$ 이다.)

3-1) $x_1 + x_2$ 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하십시오. (10점)

3-2) $x_1x_2 = -\frac{b^2}{12}$ 일 때, 곡선 C 의 길이를 ℓ 이라 하자. 이때, $\frac{\ell}{b}$ 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하십시오. (10점)

문제 4. 다음을 읽고 물음에 답하십시오. (20점)

1년 1월 1일부터 2025년 12월 31일까지의 날짜를 8개의 숫자를 이용하여 ①②③④⑤⑥⑦⑧의 형태로 나타내려 한다. 이때, ①②③④는 연도, ⑤⑥은 월, ⑦⑧은 일을 나타낸다. 예를 들어, 1년 1월 1일은 00010101로 나타낸다. 날짜 계산을 단순화하고자, 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12월은 31일, 2월은 28일, 그 외의 달은 30일까지 있다고 가정한다. 참고로, ①, ⑤, ⑦ 위치에 올 수 있는 숫자는 다음과 같다.

- ①에는 0, 1, 2
- ⑤에는 0, 1
- ⑦에는 0, 1, 2, 3

- 4-1) 1년 1월 1일부터 2025년 12월 31일까지의 날짜를 위와 같이 표현하자. 이때, 8개의 숫자가 모두 다른 경우, ①에 올 수 있는 숫자를 모두 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)
- 4-2) 1년 1월 1일부터 2025년 12월 31일까지의 날짜를 위와 같이 표현하자. 이때, 8개의 숫자가 모두 다른 날짜의 개수를 구하고, 8개의 숫자가 모두 다른 날짜 중에서 1년 1월 1일로부터 가장 가까운 날짜를 구하시오. (10점)

3. 출제 의도

- 주어진 조건이 의미하는 바를 정확히 이해하고 주어진 조건을 활용하여 물음에 대한 답을 논리적으로 설명할 수 있는 능력을 평가하고자 함
- 문항이 의도한 바를 정확하게 이해하고 주장에 대한 근거를 합리적으로 추론할 수 있는 능력을 평가하고자 함
- 수열의 극한, 접선의 방정식, 함수의 그래프 등을 종합적으로 활용하여 주어진 문제를 논리적으로 해결하는 능력을 평가하고자 함
- 벡터의 의미와 이차곡선 등을 종합적으로 활용하여 주어진 문제를 논리적으로 해결하는 능력을 평가하고자 함
- 정적분을 이해하고 활용하여 문제를 논리적으로 해결하는 능력을 평가하고자 함
- 순열을 활용하여 경우의 수를 구하는 과정을 평가하고자 함

4. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	1. 교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"	
관련 성취기준	1. 교과명: 수학	
	과목명: 수학	
	성취기준	(1) 문자와 식 ㉔ 복소수와 이차방정식 [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. ㉕ 이차방정식과 이차함수 [10수학01-09] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다.
		(5) 확률과 통계 ㉒ 순열과 조합 [10수학05-02] 순열의 의미를 이해하고, 순열의 수를 구할 수 있다.
	과목명: 수학 II	
	성취기준	(1) 함수의 극한과 연속 ㉑ 함수의 극한 [12수학 II 01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의