7. 예시 답안 혹은 정답

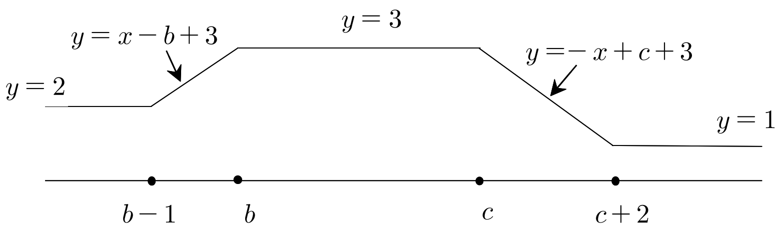
하위 문항	예시 답안

1-1

$$\sigma(g(x))=\begin{cases}1 & (x \ge b)\\ x-b+1 & (b-1 \le x < b)\\ 0 & (x < b-1)\end{cases},\quad \sigma(h(x))=\begin{cases}0 & (x \ge c+2)\\ -x+c+2 & (c \le x < c+2)\\ 2 & (x < c)\end{cases},$$

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x \ge c+2)\\ -x+c+3 & (c \le x < c+2)\\ 3 & (b \le x < c)\\ x-b+3 & (b-1 \le x < b)\\ 2 & (x < b-1)\end{cases}$$

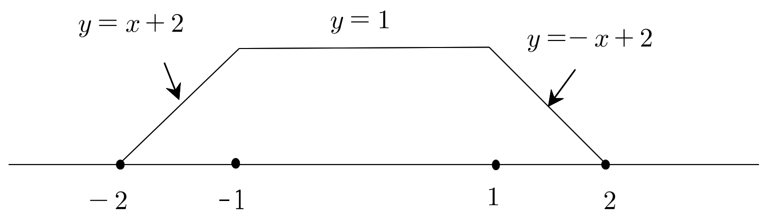
따라서 $b=c$일 때 세 점에서만 미분불가능하다.



$y=f(x)$의 그래프

1-2

$h(x)=\sigma(g(x))+\sigma(g(-x))-1$라 두면 $h(x)=\begin{cases}0 & (x \ge 2)\\ -x+2 & (1 \le x < 2)\\ 1 & (-1 \le x < 1)\\ x+2 & (-2 \le x < -1)\\ 0 & (x < -2)\end{cases}$ 이고,



$y=h(x)$의 그래프

f의 미분가능한 점에서 $f'(x)=(x-a)(x-b)h'(x)+(2x-a-b)h(x)$이다. 즉,

$$f'(x)=\begin{cases}0 & (x > 2)\\ (2x-a-b))(-x+2)+(x-a)(x-b)(-1) & (1 < x < 2)\\ 2x-a-b & (-1 < x < 1)\\ (2x-a-b)(x+2)+(x-a)(x-b) & (-2 < x < -1)\\ 0 & (x < -2)\end{cases}$$

하위 문항	예시 답안
1-2	함수 $f(x)=(x-a)(x-b)h(x)$는 $x=-2,\ -1,\ 1,\ 2,$ 네 점에서 미분불가능 할 수 있다. (1) $f(x)$의 $x=-2$에서의 좌미분은 0, 우미분은 $(-2-a)(-2-b)$ 이므로, $f(x)$가 $x=-2$에서 미분가능할 조건은 : $a=-2$ 혹은 $b=-2$ 이다. (2) $f(x)$의 $x=-1$에서의 좌미분은 $(-2-a-b)+(-1-a)(-1-b)$, 우미분은 $-2-a-b$ 이므로, $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능할 조건은 : $a=-1$ 혹은 $b=-1$ 이다. (3) $f(x)$의 $x=1$에서의 좌미분은 $2-a-b$, 우미분은 $2-a-b-(1-a)(1-b)$ 이므로, $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능할 조건 : $a=1$ 혹은 $b=1$ 이다. (4) $f(x)$의 $x=2$에서의 좌미분은 $-(2-a)(2-b)$, 우미분은 0 이므로,$f(x)$가 $x=2$에서 미분가능할 조건은 : $a=2$ 혹은 $b=2$ 이다. $f(x)$가 두 점에서만 미분 불가능하기 위해서는 (a,b)가 위의 (1), (2), (3), (4) 식 중에서 두 개만 만족해야 하고, 따라서 다음과 같아야 한다. $(a,b)=(1,-1),(1,-2),(1,2),(-1,1),(-1,-2),(-1,2),$ $(-2,-1),(-2,1),(-2,2),(2,-2),(2,-1),(2,1).$ 이 중에 $f(0)=ab>0$인 (a,b)는 $\underline{(a,b)=(1,2),\ (-1,-2),\ (-2,-1),\ (2,1)}$ 이다.
1-3	$h(x)=f(x)-ax-b$라고 하면, $$h(x)=\begin{cases}-ax-b & (x\ge 2)\\ -(a+1)x+2-b & (1\le x<2)\\ -ax-b+1 & (-1\le x<1)\\ (1-a)x+2-b & (-2\le x<-1)\\ -ax-b & (x<-2)\end{cases}$$ 이고, $h(x)$의 그래프가 x축과 세 점에서 만나면 된다. ▶우선 $a=0$인 경우, x축과 두 번 만나거나 무한히 많은 점에서 만남으로 $a>0$ 혹은 $a<0$이어야 한다. ▶$a>0$인 경우, 구간 $x<-2$ 그리고 $x>-1$에서 $h(x)$는 감소함으로, $h(x)$의 그래프가 x축과 세 번 만나기 위해서는, $h(-2)<0$, $h(-1)>0$이어야 한다. 즉, $b<a+1$, $b>2a$이어야 한다. ▶$a<0$인 경우, 구간 $x<1$ 그리고 $x>2$에서 $h(x)$는 증가함으로, $h(x)$의 그래프가 x축과 세 번 만나기 위해서는, $h(1)>0$, $h(2)<0$이어야 한다. 즉, $b<-a+1$, $b>-2a$이어야 한다. **<u>따라서, (a,b)가 차지하는 영역의 면적은 1이다.</u>**

하위 문항	예시 답안
2-1	변곡점의 x좌표를 α라고 하면, $f''(\alpha)=6\alpha+2p=0$이므로 $\alpha=-\frac{p}{3}$이다. 변곡점 $(\alpha, f(\alpha))$에서의 접선이 $y=-x$이므로 $f(\alpha)=-\alpha$와 $f'(\alpha)=-1$을 만족한다. 즉, $\displaystyle f(\alpha)=-\frac{p^3}{27}+p\times\frac{p^2}{9}+q\times\left(-\frac{p}{3}\right)+r=\frac{p}{3}$ 이고 $\displaystyle f'(\alpha)=3\times\frac{p^2}{9}+2p\times\left(-\frac{p}{3}\right)+q=-1$이다. 따라서, $2p^3-9pq+27r=9p$이고 $-p^2+3q=-3$이다. 두 번째 식에서, $p^2=3(q+1)$이므로 $p=3k$ (k는 0이 아닌 정수)라고 놓을 수 있다. 그러면, $q=3k^2-1$이 성립한다. 이제 첫 번째 식에서, $54k^3-27k(3k^2-1)+27r=27k$가 얻어지므로, $r=k^3$이다. 따라서, $(p,q,r)=(3k,3k^2-1,k^3)$인 0이 아닌 정수 k가 존재한다. $pqr=3k^4(3k^2-1)$이므로 $k=\pm 1$일 때 $pqr=6$을 최솟값으로 가진다. 이때, $(p,q,r)=(3,2,1)$과 $(p,q,r)=(-3,2,-1)$이므로 **$f(x)=x^3+3x^2+2x+1$과 $f(x)=x^3-3x^2+2x-1$이 답이다.**
2-2	$\displaystyle \lim_{p\to\infty}\frac{pq}{r}=\lim_{k\to\infty}\frac{3k\times(3k^2-1)}{k^3}=9$
2-3	자연수 k가 있어서, $f(x)=x^3+3kx^2+(3k^2-1)x+k^3$이다. $(-3,0)$을 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선이 곡선에 접하는 점을 $(t,f(t))$라고 놓자. 그러면, 접선의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$이고 $-f(t)=f'(t)(-3-t)$를 만족한다. 따라서, $g(t)=(t+3)f'(t)-f(t)=2t^3+(3k+9)t^2+18kt+(9k^2-3-k^3)$ 가 0이 되는 서로 다른 실수 t가 세 개 존재하는 조건을 찾으면 된다. $g'(t)=6t^2+(6k+18)t+18k=6(t+3)(t+k)$이므로 $g(-3)$과 $g(-k)$의 부호가 다르면 된다. $g(-3)=-(k^3-9k^2+27k-24)=-(k-3)^3-3$는 $k=1$이면 양수이고 $k\geq 2$이면 음수이다. $g(-k)=-2k^3+(3k+9)k^2-18k^2+(9k^2-3-k^3)=-3$이므로 항상 음수이다. **따라서, $k=1$이고 $p=3k=3$이다.**

하위 문항	예시 답안
3-1	$\lvert\overrightarrow{b_i}\rvert = 2\sin\frac{\pi i}{n+1}$ 이고 두 벡터 $\overrightarrow{b_i}$, $\overrightarrow{b_j}$ 의 사잇각은 $\lvert\frac{\pi(i-j)}{n+1}\rvert$ 이다. 따라서 $\begin{aligned}\vec{b_i} \bullet \vec{b_j} &= (2\sin\frac{\pi}{n+1}i)(2\sin\frac{\pi}{n+1}j)\cos\frac{\pi}{n+1}(i-j) \\ &= (2\sin\frac{\pi}{n+1}i)(2\sin\frac{\pi}{n+1}j)\left(\cos\frac{\pi}{n+1}i\ \cos\frac{\pi}{n+1}j + \sin\frac{\pi}{n+1}i\ \sin\frac{\pi}{n+1}j\right)\end{aligned}$ 이다. 따라서, $n=7$일 때, $\begin{aligned}\vec{b_2} \bullet \vec{b_5} &= (2\sin\frac{\pi}{4})(2\sin\frac{5\pi}{8})\cos\frac{3\pi}{8} \\ &= (2\sin\frac{\pi}{4})(2\cos\frac{\pi}{8})\ \sin\frac{\pi}{8} \\ &= (2\sin\frac{\pi}{4})\sin\frac{\pi}{4} \\ &= 1\end{aligned}$ 을 얻는다.
3-2	3-1)에서 얻어진 공식 $\vec{b_1} \bullet \vec{b_i} = (2\sin\frac{\pi}{n+1})(2\sin\frac{\pi i}{n+1})\left(\cos\frac{\pi}{n+1}\ \cos\frac{\pi i}{n+1} + \sin\frac{\pi}{n+1}\sin\frac{\pi i}{n+1}\right)$ 로 부터 $\overrightarrow{b_1} \bullet \left(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{b_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}(\sin\frac{2\pi}{n+1})\sin\frac{2\pi i}{n+1}\right) + 4\left(\sum_{i=1}^{n}(\sin\frac{\pi}{n+1})^2(\sin\frac{\pi i}{n+1})^2\right)$ 를 얻는다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\overrightarrow{b_1} \bullet \left(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{b_i}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sin\frac{2\pi}{n+1})\sin\frac{2\pi i}{n+1}\right) + 4\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sin\frac{\pi}{n+1})^2(\sin\frac{\pi i}{n+1})^2\right)$ 이다. 여기서, $\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sin\frac{2\pi}{n+1})\sin\frac{2\pi i}{n+1}\right) &= \left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}\right)\right)\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\frac{2\pi i}{n+1}\right)\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 2\pi\int_0^1 \sin 2\pi x\, dx = 0\end{aligned}$ 이다. 또한 $\left(\sum_{i=1}^{n}(\sin\frac{\pi}{n+1})^2(\sin\frac{\pi i}{n+1})^2\right) \le n(\sin\frac{\pi}{n+1})^2$ 로 부터 $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sin\frac{\pi}{n+1})^2(\sin\frac{\pi i}{n+1})^2\right) = 0$ 을 얻는다. 따라서, $\lim_{n\to\infty}\overrightarrow{b_1} \bullet \left(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{b_i}\right) = 0$ 이다.

하위 문항	예시 답안
4-1	$\dfrac{\text{네 번째 기회에서 진홍색 공을 뽑는 경우의 수}}{\text{전체 경우의 수}}$ 는 다음과 같이 계산할 수 있다. $$\frac{8\times7\times6\times4}{9\times8\times7\times6}=\frac{4}{9}$$
4-2	$\mathrm{E}[X]=100\mathrm{P}(X=100)+200\mathrm{P}(X=200)+300\mathrm{P}(X=300)$, 여기서 $\mathrm{P}\{X=100\}=\mathrm{P}\{\text{첫 번째 진홍색 공, 네 번째 파란색 공}\}=\dfrac{4\times7\times6\times5}{9\times8\times7\times6}=\dfrac{20}{72}$, $\mathrm{P}\{X=200\}=\mathrm{P}\{\text{첫 번째 파란색 공, 네 번째 진홍색 공}\}=\dfrac{5\times7\times6\times4}{9\times8\times7\times6}=\dfrac{20}{72}$, $\mathrm{P}\{X=300\}=\mathrm{P}\{\text{첫 번째 진홍색 공, 네 번째 진홍색 공}\}=\dfrac{4\times7\times6\times3}{9\times8\times7\times6}=\dfrac{12}{72}$. 따라서, $\mathrm{E}[X]=100\dfrac{20}{72}+200\dfrac{20}{72}+300\dfrac{12}{72}=\dfrac{400}{3}$.