7. 예시 답안 혹은 정답

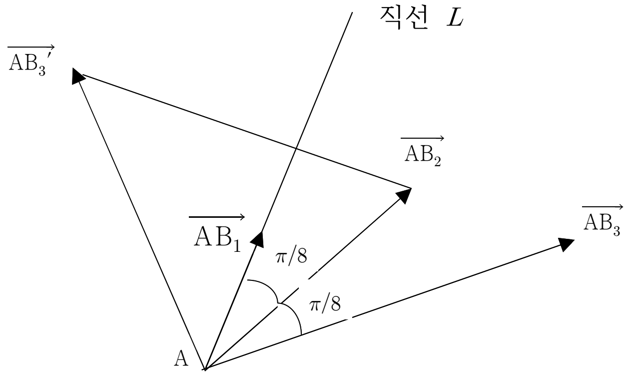
<table>
<tr><th>하위
문항</th><th>예시 답안</th></tr>
<tr><td>1-1</td><td>조건 (가) (i)로부터
$\lim_{h\to\infty} f(h)\dfrac{(\ln(h+1)-\ln(h))}{h} = \lim_{h\to\infty}\left(\dfrac{f(h)}{h^2}\right)\left(\ln(1+\dfrac{1}{h})^h\right) = \lim_{h\to\infty}\left(\dfrac{f(h)}{h^2}\right) = 1$
를 얻고, 이차함수 $f(x)$가 $f(x)=x^2+cx+d$의 형태임을 유도한다. 조건 가) (ii)로부터
$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_h^{h+\sin(h)} f(x)\,dx}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{(h+\sin(h))^3-h^3}{3}+\frac{c}{2}((h+\sin(h))^2-h^2)+d\sin(h)}{h^2}$$ $$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{c}{2}((h+\sin(h))^2-h^2)+d\sin(h)}{h^2}$$ $$=3$$
를 얻고, 이로부터 $\dfrac{3c}{2}=3$, $d=0$을 유도한다. 따라서, 구하는 <u>$f(x)=x^2+2x$</u>이다.</td></tr>
<tr><td>1-2</td><td>두 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$를 지나는 직선의 방정식은
$$\begin{aligned} y=k(x) &= \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+f(\alpha) \\ &= (\beta+\alpha+2)(x-\alpha)+\alpha^2+2\alpha \\ &= (\beta+\alpha+2)x-\alpha\beta \end{aligned}$$
이다. 따라서 조건 (나)를 활용하면
$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta (k(x)-f(x))\,dx &= \int_\alpha^\beta ((\beta+\alpha)x-\alpha\beta-x^2)dx \\ &= \frac{(\beta-\alpha)^3}{6} \\ &= 1 \end{aligned}$$
로부터 <u>$\beta-\alpha=1$을 얻는다.</u>

조건 (다)로부터 두 실수 a,b에 대하여 포물선 $y=h(x)=-(x-a)^2+b$가 두 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$을 지나므로 α, β는
$$f(x)-h(x)=2x^2+2x(1-a)+a^2-b=0$$
의 두 근이다. 따라서, 근과 계수의 관계로부터
$$\alpha+\beta=a-1,\ \alpha\beta=\frac{a^2-b}{2},$$
얻고, $\beta=\alpha+1$을 대입하여 정리하면 <u>$b=\dfrac{a^2+2a}{2}$를 얻는다.</u></td></tr>
</table>

하위 문항	예시 답안
2-1	조건 (i)-(iii)으로부터 $$g(x)=(3a^2-1)x-2a^3-a$$ 이다. $k(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $$k(x)=x^3-3a^2x+2a^3+a$$ 이다. $a=0$일 때와 $a\neq 0$인 경우로 나누어 생각해 보면, $a=0$일 때는 $k(x)=x^3$이므로 $k(x)=0$은 하나의 실근을 갖는다. 따라서, $a=0$일 때 두 그래프 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 한 점에서 만난다. 이제 $a\neq 0$이라 하자. $k(x)$를 미분하면 $k'(x)=3x^2-3a^2$이다. 따라서 $a\neq 0$일 때, $k(x)$는 $x=\|a\|$에서 극솟값, $x=-\|a\|$에서 극댓값을 갖는다. ■ $a>0$인 경우: $k(x)$의 극솟값은 $x=a$일 때 $k(a)=a^3-3a^3+2a^3+a=a>0$이다. ■ $a<0$인 경우: $k(x)$의 극댓값은 $x=a$일 때 $k(a)=a^3-3a^3+2a^3+a=a<0$이다. 두 경우 모두 $y=k(x)$는 x축과 한 점에서 만난다. 따라서 $a\neq 0$인 경우에도 두 그래프 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 한 점에서 만난다.
2-2	$k(x)=f(x)-g(x)$라 하면, $k(x)=x^3-3a^2x+2a^3+a$이다. ■ $a>0$인 경우: $k(-a)=4a^3+a>0$이고 $\lim_{x\to-\infty}k(x)=-\infty$이므로 $y=k(x)$는 $(-\infty,-a)$에서 x축과 만난다. 따라서, $h(a)<-a$이다. ■ $a<0$인 경우: $k(-a)=4a^3+a<0$이고 $\lim_{x\to\infty}k(x)=\infty$이므로 $y=k(x)$는 $(-a,\infty)$에서 x축과 만난다. 따라서, $h(a)>-a$이다. 따라서, $a\neq 0$일 때, $-ah(a)>a^2$이다.
2-3	$k(x)=f(x)-g(x)$라 하면, $k(x)=x^3-3a^2x+2a^3+a$이다. $h(a)$는 $k(x)=0$의 해이므로 $h(a)$는 $$(h(a))^3-3a^2h(a)+2a^3+a=0$$ 을 만족한다. 따라서 $$\left(\frac{h(a)}{a}\right)^3-3\left(\frac{h(a)}{a}\right)+2+\frac{1}{a^2}=0$$ 이다. 이 식에 $a\to\infty$를 양변에 취하고 $X=\lim_{a\to\infty}\frac{h(a)}{a}$라 놓으면 $$X^3-3X+2=(X-1)^2(X+2)=0$$ 을 얻는다. 문제 2-2)에 의해 $X=\lim_{a\to\infty}\frac{h(a)}{a}\leq -1$이므로 $\lim_{a\to\infty}\frac{h(a)}{a}=-2$이다.

하위 문항	예시 답안
3-1	(아래 참조)

점 A를 지나고 벡터 $\overrightarrow{AB_1}$에 평행인 직선을 L이라 하고, 벡터 $\overrightarrow{AB_3}$ 를 직선 L에 대하여 대칭 이동한 벡터를 $\overrightarrow{AB_3}'$이라 하면 $(|\overrightarrow{AB_2}-t\overrightarrow{AB_1}|+|\overrightarrow{AB_3}-t\overrightarrow{AB_1}|)^2$의 최솟값은 $|\overrightarrow{AB_2}-\overrightarrow{AB_3}'|^2$이다.



두 벡터 $\overrightarrow{AB_1}$와 $\overrightarrow{AB_2}$ 가 이루는 각은 $\frac{\pi}{8}$, 두 벡터 $\overrightarrow{AB_2}$와 $\overrightarrow{AB_3}$ 가 이루는 각은 $\frac{\pi}{8}$이다. 이때

$$|\overrightarrow{AB_2}|=2\sin\frac{\pi}{4}=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2},\quad |\overrightarrow{AB_3}|=|\overrightarrow{AB_3}'|=2\sin\frac{3\pi}{8}=2\cos\frac{\pi}{8}$$

이고, 반각공식으로부터

$$(\sin\frac{\pi}{8})^2=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad (\cos\frac{\pi}{8})^2=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

를 얻는다. 따라서

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB_2}-\overrightarrow{AB_3}'|^2 &= |\overrightarrow{AB_2}|^2+|\overrightarrow{AB_3}'|^2-2|\overrightarrow{AB_2}||\overrightarrow{AB_3}'|\cos\frac{3\pi}{8}\\ &=2+(2+\sqrt{2})-2(\sqrt{2})(2\sin\frac{3\pi}{8})\cos\frac{3\pi}{8}\\ &=2+(2+\sqrt{2})-2\sqrt{2}(\sin\frac{3\pi}{4})\\ &=2+\sqrt{2}\end{aligned}$$

이다.

하위 문항	예시 답안
4-1	부품 A가 정상일 사건을 A, 부품 B가 정상일 사건을 B, 부품 C가 정상일 사건을 C라 하자. ■ 회로가 작동할 사건은 $(A\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C)$이고 $(A\cap C)$와 $(A^c\cap B\cap C)$는 배반사건이므로 회로가 작동할 확률은 $$\begin{aligned} &P((A\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C)) \\ &= P(A\cap C)+P(A^c\cap B\cap C) \\ &= \frac{4}{5}\times\frac{9}{10}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{9}{10} \\ &= \frac{171}{200} \end{aligned}$$ 이다. 따라서 **회로가 작동하지 않을 확률은 $\frac{29}{200}$이다.** ■ 부품 A가 불량품이고 회로가 작동하지 않을 사건은 $A^c-(A^c\cap B\cap C)$이고 사건 A^c가 사건 $A^c\cap B\cap C$를 포함하므로 **부품 A가 불량품이고 회로가 작동하지 않을 확률은** $$\begin{aligned} &P(A^c-(A^c\cap B\cap C)) \\ &= P(A^c)-P(A^c\cap B\cap C) \\ &= \frac{1}{5}-\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{9}{10} \\ &= \frac{13}{200} \end{aligned}$$ **이다.** ■ 따라서 회로가 작동하지 않았다면 부품 A가 불량품일 확률은 $$\begin{aligned} P(\text{A가 불량품}\mid\text{회로작동안함}) &= \frac{\text{P(A가 불량품이고 회로작동안함)}}{P(\text{회로작동안함})} \\ &= \frac{\frac{13}{200}}{\frac{29}{200}} \\ &= \frac{13}{29} \end{aligned}$$ 이다.