

[고려대학교 문항정보]

1. 일반 정보

문항붙임번호	14	
유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사 <input type="checkbox"/> 선다형고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(오전) / 1~4번	
출제 범위	교육과정 과목명	수학, 수학 II, 미적분, 확률과 통계, 기하
	핵심개념 및 용어	함수의 그래프, 적분법, 내적, 조건부확률
예상 소요 시간	80분	

2. 문항 및 제시문

문제 1. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (35점)

함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 $[0, 1]$ 에서 연속이다.

(나) $f(0) = 0, f(1) = 1$

(다) 구간 $[0, 1]$ 에서 $f'(x) > 0$ 이고 $f(x) \leq x$ 이다.

(라) $\int_0^{\frac{1}{2}} x f'(x) dx = \frac{13}{192}$

(마) 구간 $[0, 1]$ 에서 함수 $g(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$g(x) = \int_0^x (1 - f(t)) dt + 3 \int_x^1 f(t) dt$$

이때, 함수 $g(x)$ 는 $x = \frac{1}{2}$ 에서 극값 $\frac{61}{48}$ 을 갖는다.

1-1) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (5점)

1-2) $\int_0^1 \left| f(x) - \frac{1}{4} \right| dx$ 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (15점)

1-3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| f\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - \frac{k}{n} \right| f'\left(\frac{k}{n}\right)$ 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (15점)

문제 2. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (25점)

두 번 미분가능한 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여, $f(x)+f(-x)=0$ 이다.

(나) $f'(-1)=f'(1)=0$

(다) 구간 $(-1,1)$ 에서, $f''(x)=g'(x)$ 이다.

(라) $g(1)=\pi$, $h(1)=2\pi$, $h(-1)=1$

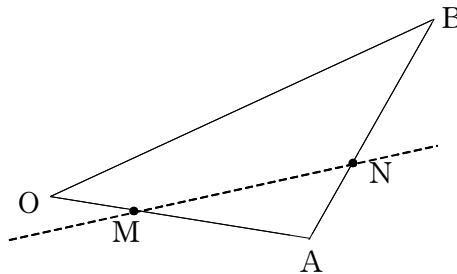
(마) $\int_{-1}^1 f'(x)h'(x)dx = \pi$

2-1) 구간 $(-1,1)$ 에서, $g(x)=g(-x)$ 임을 설명하시오. (10점)

2-2) $\int_0^1 g(x)(h'(x)+h'(-x))dx$ 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (15점)

문제 3. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (20점)

아래 그림과 같이 $\overline{OA}=2$, $\overline{OB}=3$, $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ 를 만족시키는 삼각형 OAB 에 대하여, 선분 OA 를 1:2로 내분하는 점을 M , 선분 AB 를 1:2로 내분하는 점을 N 이라 하자.



3-1) $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ 라 할 때, \overrightarrow{MN} 을 \vec{a} , \vec{b} 로 나타내고, 선분 MN 의 길이를 구하고 그 이유를 설명하시오. (10점)

3-2) 선분 OB 를 2:1로 내분하는 점을 B' 이라 하고, 점 B' 에서 직선 MN 에 내린 수선의 발을 H 라고 하자. 이때, 선분 MH 의 길이를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

문제 4. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (20점)

실수 x 와 y 에 대하여, $x \wedge y = \begin{cases} x & (x \leq y) \\ y & (x > y) \end{cases}$ 라고 하자.

표본공간 S 의 두 사건 A, B 에 대하여 $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$ 이다.

대한대학교와 민국대학교가 이틀에 걸쳐, 첫째 날은 야구 경기와 농구 경기를 하고, 둘째 날은 럭비 경기와 축구 경기를 한다. 대한대학교가 야구 경기에서 이기는 사건과 농구 경기에서 이기는 사건은 서로 독립이다. 그리고 모든 경기에서 무승부는 없다.

첫째 날, 대한대학교가 야구 경기에서 이길 확률을 x , 그리고 대한대학교가 농구 경기에서 이길 확률을 y 라고 하자.

둘째 날, 대한대학교가 첫째 날 두 경기 중 한 경기 이상 이긴 경우, 럭비 경기에서 이길 확률은 x , 축구 경기에서 이길 확률은 y 이다. 그리고 대한대학교가 첫째 날 두 경기 모두 진 경우, 사기가 떨어져서, 럭비 경기와 축구 경기에서 이길 확률은 각각 $x \wedge y$ 가 된다.

4-1) 대한대학교가 럭비 경기에서 이길 확률을 x 와 y 를 이용해서 표현하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

4-2) $x = \frac{1}{3}$ 이고, $x \leq y$ 일 때, 대한대학교가 럭비 경기에서 이길 확률이 대한대학교가 축구 경기에서 질 확률보다 작거나 같도록 하는 y 의 값의 범위를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

3. 출제 의도

1. 함수의 그래프 개형을 파악하고 정적분과 급수와의 관계 등을 종합적으로 활용하여 문제를 논리적으로 해결하는 능력을 평가하고자 함
2. 미분과 적분과의 관계, 부분적분 등 주어진 조건을 활용하여 물음에 대한 답을 논리적으로 설명할 수 있는 능력을 평가하고자 함
3. 벡터의 의미, 벡터의 내적 등을 종합적으로 활용하여 주어진 문제를 논리적으로 해결하는 능력을 평가하고자 함
4. 확률과 조건부확률의 의미를 정확히 이해하고, 확률을 구하는 과정을 평가하고자 함

[고려대학교 문항정보]

1. 일반 정보

문항붙임번호	15	
유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사 <input type="checkbox"/> 선다형고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 (오후) / 1~4번	
출제 범위	교육과정 과목명	수학 II, 미적분, 확률과 통계, 기하
	핵심개념 및 용어	함수의 극한, 미분가능성, 급수, 중복조합, 평면벡터
예상 소요 시간	80분	

2. 문항 및 제시문

문제 1. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (30점)

아래로 볼록인 곡선 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$)는 매개변수 t 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(t) = \cos^3 t, \quad y(t) = 2\sin^3 t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

실수 a ($0 < a < 1$)에 대하여 점 $A(a, 0)$ 를 지나고 이 곡선에 접하는 직선이 단 하나 존재한다. (단, 곡선의 두 끝점은 접점이 아니다.) 이 접선을 ℓ_a 라 하자.

1-1) $a = \frac{1}{2}$ 일 때, 접선 ℓ_a 의 방정식을 구하고 그 이유를 설명하시오. (10점)

1-2) 접선 ℓ_a 가 x 축과 이루는 예각의 크기를 $g(a)$ 라 할 때, $a^3 \tan(g(a))$ 의 최댓값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

1-3) 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 ℓ_a , 그리고 직선 $y = 0$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1(a)$ 라 하고, 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 ℓ_a , 그리고 직선 $x = 0$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2(a)$ 라 하자. 이때, $S_1(a) + S_2(a)$ 가 최소가 되는 a 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

문제 2. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (30점)

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y = f(x)$ 는 $x = \frac{2}{3}$ 에서 변곡점을 갖는다.

(나) 다음과 같이 정의된 함수 $g(x)$ 가 $x = 0$ 에서 미분가능하다.

$$g(x) = \begin{cases} xf'(x) + f(x) & (x \geq 0) \\ (1-x)e^{-x} + \cos x & (x < 0) \end{cases}$$

(다) 곡선 $y = f(x)$ 위의 서로 다른 세 점에서 점 $(0, k)$ 를 지나는 접선을 그을 수 있는

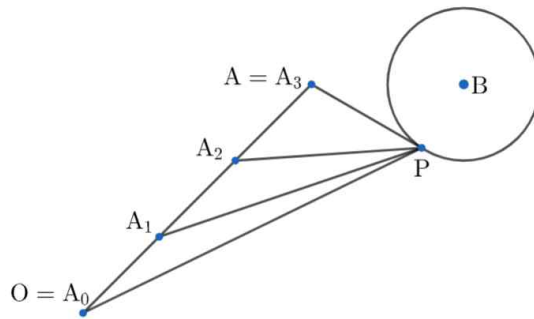
k 값의 범위는 $2 < k < \frac{62}{27}$ 이다.

2-1) $f(x)$ 를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (20점)

2-2) $F(x) = \int_0^x |f(t)| dt$ 라 할 때, $\int_0^2 f(x)e^{F(x)} dx$ 의 값을 구하고 그 이유를 설명하시오. (10점)

문제 3. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (20점)

아래 그림과 같이 좌표평면 위에 두 점 $O(0,0)$, $A(3,3)$ 와 중심이 $B(5,3)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원 C 가 있다. 점 $O = A_0$, A_1 , A_2 , $A_3 = A$ 는 선분 OA 를 $\overline{A_0A_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$ 이 되도록 삼등분하며, 점 P 는 원 C 위를 움직인다.



3-1) $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}|^2$ 의 최솟값과 이때 점 P 의 좌표를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

3-2) $|\overrightarrow{A_1P} + 4\overrightarrow{A_2P} + \overrightarrow{A_3P}|^2$ 의 최솟값은 $a + b\sqrt{10}$ 이다. (단, a 와 b 는 정수) 이때, 순서쌍 (a,b) 를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

문제 4. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (20점)

파란색 공이 n 개, 노란색 공이 $2n-1$ 개, 진홍색 공이 $2n+2$ 개 있을 때, $2n$ 개의 공을 택하는 경우의 수를 a_n 이라고 하자. (단, n 은 자연수이고, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않는다.)

4-1) a_2 를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (5점)

4-2) a_n 을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

4-3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + 8n + 15}$ 을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (5점)

3. 출제 의도

1. 매개변수 미분법, 삼각함수의 덧셈정리 또는 삼각함수의 도함수 등을 이용하여 주어진 문제를 논리적으로 해결하는 능력을 평가하고자 함
2. 주어진 조건이 의미하는 바를 정확히 이해하고 미분가능한 조건, 접선의 방정식, 미분의 방정식에의 활용, 치환적분법 등을 종합적으로 활용하여 물음에 대한 답을 논리적으로 설명할 수 있는 능력을 평가하고자 함
3. 벡터의 의미, 벡터의 연산과 내적 등을 종합적으로 활용하여 주어진 문제를 논리적으로 해결하는 능력을 평가하고자 함
4. 경우의 수를 구하기 위해 중복조합을 활용하고 관련된 급수를 계산할 수 있는 능력을 평가하고자 함

4. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	1. 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"		
관련 성취기준	1. 교과명: 수학		
	과목명: 수학 II		
	성취 기준	(1) 함수의 극한과 연속 [12수학 II 01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.	문제 2
		(2) 미분 [12수학 II 02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다. [12수학 II 02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학 II 02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12수학 II 02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.	문제 1 문제 2
		과목명: 미적분	
		(1) 수열의 극한 [12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.	문제 4
	성취 기준	(2) 미분법 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다. [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다. [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.	문제 1 문제 2
		(3) 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	문제 2