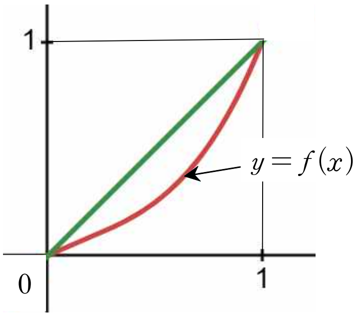
7. 예시 답안 혹은 정답

하위 문항	예시 답안
1-1	조건 (마)에서 $g'(\frac{1}{2})=1-4f(\frac{1}{2})=0$으로부터 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$를 얻는다.

1-2

조건 (가), (나), (다)로부터 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같은 꼴이다.



$A=\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt$, $B=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt$라 놓으면, 조건 (라)로부터

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\,dx=[xf(x)]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\frac{13}{192}$$를 얻고

$$A=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\frac{1}{8}-\frac{13}{192}=\frac{11}{192}$$을 얻는다.

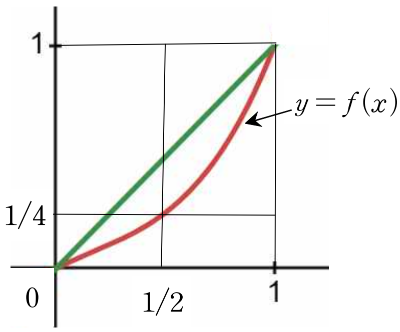
조건 (마)에서 $g(\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-f(t))\,dt+3\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt=\frac{1}{2}-A+3B=\frac{61}{48}$이다.

따라서, $3B=\frac{61}{48}-\frac{1}{2}+A=\frac{159}{192}$에서 $B=\frac{53}{192}$이다.

다음 주어진 그림으로부터

$$A=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\frac{11}{192}$$

$$B=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx=\frac{53}{192}$$



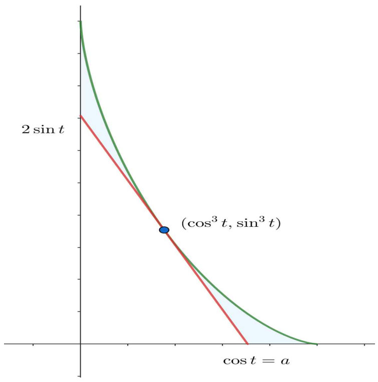
$$\int_0^1\left|f(x)-\frac{1}{4}\right|dx=(\frac{1}{8}-A)+(B-\frac{1}{8})=B-A=\frac{53}{192}-\frac{11}{192}=\frac{42}{192}=\frac{7}{32}$$

을 얻는다.

하위 문항	예시 답안
1-3	$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lvert f(f(\frac{k}{n}))-\frac{k}{n}\rvert f'(\frac{k}{n})=\int_0^1\lvert f(f(x))-x\rvert f'(x)dx$ 이고 $f(x)=t$로 치환하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lvert f(f(\frac{k}{n}))-\frac{k}{n}\rvert f'(\frac{k}{n})=\int_0^1\lvert f(f(x))-x\rvert f'(x)dx=\int_0^1\lvert f(t)-f^{-1}(t)\rvert dt$ 이다. $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\int_0^1\lvert f(t)-f^{-1}(t)\rvert dt$ $=2\int_0^1(x-f(x))dx=1-2\int_0^1 f(x)dx=1-2(\frac{64}{192})=\frac{1}{3}$ 이다.
2-1	조건 (다)를 이용하면, 어떤 상수 C에 대하여, $g(x)=f'(x)+C$이 된다. 조건 (가)로부터, $f'(x)=f'(-x)$. 따라서, $g(-x)=f'(-x)+C=f'(x)+C=g(x)$
2-2	2-1)에 의해 $g(x)=g(-x)$이다. 이 사실을 이용하면 $\int_0^1 g(x)h'(-x)dx=\int_{-1}^0 g(-x)h'(x)dx=\int_{-1}^0 g(x)h'(x)dx$ 따라서, $\int_0^1 g(x)(h'(x)+h'(-x))dx=\int_0^1 g(x)h'(x)dx+\int_0^1 g(x)h'(-x)dx$ $=\int_0^1 g(x)h'(x)dx+\int_{-1}^0 g(x)h'(x)dx=\int_{-1}^1 g(x)h'(x)dx$ 부분적분과 조건 (라)와 (다)를 이용하면 $\int_{-1}^1 g(x)h'(x)dx=[g(x)h(x)]_{-1}^{1}-\int_{-1}^1 g'(x)h(x)dx=\pi(2\pi-1)-\int_{-1}^1 f''(x)h(x)dx$ 그리고 조건 (나), (마)와 부분적분을 이용하면 $\int_{-1}^1 f''(x)h(x)dx=-\pi$ 따라서, $\int_0^1 g(x)(h'(x)+h'(-x))dx=2\pi^2$

하위 문항	예시 답안
3-1	$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \left(\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}\right) = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$ 이고 $\lvert\overrightarrow{MN}\rvert^2 = \left\lvert\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}\right\rvert^2 = \frac{1}{9}(\lvert\vec{a}\rvert^2 + \lvert\vec{b}\rvert^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{1}{9}\left(2^2+3^2+2\times 2\times 3\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{19}{9}$ 이다. 따라서, $\lvert\overrightarrow{MN}\rvert = \frac{\sqrt{19}}{3}$
3-2	두 벡터 $\overrightarrow{MB'} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ 와 $\overrightarrow{MN} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$ 사이의 각을 α 라 하면, $\overrightarrow{MB'}\cdot\overrightarrow{MN} = \lvert\overrightarrow{MB'}\rvert\lvert\overrightarrow{MN}\rvert\cos\alpha$ 로부터 $\lvert\overrightarrow{MB'}\rvert\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{MB'}\cdot\overrightarrow{MN}}{\lvert\overrightarrow{MN}\rvert} = \frac{\frac{-\lvert\vec{a}\rvert^2+2\lvert\vec{b}\rvert^2+\vec{a}\cdot\vec{b}}{9}}{\frac{\sqrt{19}}{3}} = \frac{17}{3\sqrt{19}} = \frac{17\sqrt{19}}{57}$ 선분 MH의 길이는 $\overline{MB'}\cos\alpha$ 이므로, 정답은 $\frac{17\sqrt{19}}{57}$ 이다.
4-1	대한대학이 첫째 날 한 경기 이상을 이기는 사건을 A라고 하고, 둘째 날 대한대학이 럭비 경기에서 이기는 사건을 B_1 그리고 축구 경기에서 이기는 사건을 B_2라 하자. 주어진 조건에 의해 $P(B_1 \mid A) = x$, $P(B_1 \mid A^c) = x \wedge y$, $P(B_2 \mid A) = y$, $P(B_2 \mid A^c) = x \wedge y$ 사건 A가 일어나는 경우는 야구 승, 축구 승, 혹은 야구 승, 축구 패, 혹은 야구 패, 축구 승이고 각각이 독립이므로 $P(A) = xy + x(1-y) + (1-x)y = x+y-xy$ 따라서, 확률의 곱셈정리에 의해 $P(B_1) = P(B_1 \cap A) + P(B_1 \cap A^c) = P(A)P(B_1 \mid A) + P(A^c)P(B_1 \mid A^c)$ $= x(x+y-xy) + (x \wedge y)(1-x-y+xy)$
4-2	위와 마찬가지로 $P(B_2) = P(B_2 \cap A) + P(B_2 \cap A^c) = P(A)P(B_2 \mid A) + P(A^c)P(B_2 \mid A^c)$ $= y(x+y-xy) + (x \wedge y)(1-x-y+xy)$ $x = \frac{1}{3}$ 이고 $x \le y$ 이므로 $P(B_1) = x(x+y-xy) + (x \wedge y)(1-x-y+xy) = \frac{1}{3}$ $P(B_2) = y(x+y-xy) + (x \wedge y)(1-x-y+xy) = \frac{2}{3}y^2 + \frac{1}{9}y + \frac{2}{9}$ $P(B_1) \le 1 - P(B_2)$ 을 만족시키기 위해서는 $\frac{1}{3} \le 1 - \left(\frac{2}{3}y^2 + \frac{1}{9}y + \frac{2}{9}\right)$. 즉, $6y^2 + y - 4 \le 0$ 이다. 이 부등식과 $y \ge x = \frac{1}{3}$ 을 동시에 만족시키는 y의 범위는 $\frac{1}{3} \le y \le \frac{-1+\sqrt{97}}{12}$ 이다.

7. 예시 답안 혹은 정답

하위 문항	예시 답안
1-1	$0 < t < \frac{\pi}{2}$를 만족시키는 실수 t에 대해서 $(x(t), y(t))$를 지나는 접선의 방정식은 $y = -2\tan t\,(x - \cos^3 t) + 2\sin^3 t$이 된다. $y = 0$을 대입하면 x절편은 $\cos t$가 되고, 점 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$를 지나므로, $\cos t = \frac{1}{2}$이 된다. 따라서, $t = \frac{\pi}{3}$이다. 따라서, 구하는 접선의 방정식은 $y = -2\sqrt{3}x + \sqrt{3}$이다.
1-2	$0 < t < \frac{\pi}{2}$를 만족시키는 실수 t에 대해서, $(x(t), y(t))$를 지나는 접선의 방정식은 $y = -2\tan t\,(x - \cos^3 t) + 2\sin^3 t$이므로, 이 접선의 x절편과 y절편은 각각 $\cos t$와 $2\sin t$이 된다. 또한, 이 직선은 점 $(a, 0)$을 지나므로 $a = \cos t$가 된다. 이 접선과 x축이 이루는 예각의 크기가 $g(a)$이므로, $2\tan t = \tan g(a)$가 된다. 또한, $\cos t = a$와 $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - a^2}$임을 이용하면, $\frac{2\sqrt{1 - a^2}}{a} = \tan(g(a))$을 얻는다. 따라서, $a^3 \tan(g(a)) = 2a^2\sqrt{1 - a^2}$이 되고, 이 함수의 구간 $(0, 1)$에서의 최댓값은 $a = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$일 때, $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$이 된다.
1-3	구간 $(0, 1)$에 있는 임의의 실수 a에 대하여, $\cos t = a$가 되는 t가 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 존재한다. 또한, 제시문에 의하여 주어진 그래프는 아래로 볼록이다. 그러므로, $S_1(a) + S_2(a)$의 값은 아래 그림의 색칠한 부분의 넓이가 된다.  따라서, $S_1(a) + S_2(a)$의 최솟값을 구하기 위해서는 위의 그림의 삼각형의 면적이 최대가 되는 a를 구하면 된다. 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2\sin t\cos t$이고 삼각함수의 덧셈정리에 의해 $\frac{1}{2} \times 2\sin t\cos t = \frac{1}{2}(\sin t\cos t + \cos t\sin t) = \frac{1}{2}\sin(t + t) = \frac{1}{2}\sin 2t$이므로, $t = \frac{\pi}{4}$일 때 최댓값을 가진다. 따라서, $S_1(a) + S_2(a)$값이 최소가 되게 하는 a의 값은, $\cos t = a$의 관계식에 의해 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$가 된다.

하위 문항	예시 답안
2-1	삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라고 하자. $(a>0)$ 조건 (가)로부터 $f''\left(\frac{2}{3}\right)=6a\times\frac{2}{3}+2b=0$ 이고, $b=-2a$를 얻는다. 조건 (나)로부터 $g(x)=\begin{cases} xf'(x)+f(x) & (x\geq 0) \\ (1-x)e^{-x}+\cos x & (x<0) \end{cases}$ 가 $x=0$에서 미분가능하기 위해서는 $x=0$에서 연속이어야 하므로 $f(0)=2$를 얻는다. $\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}$가 존재하기 위해서는 $\lim_{h\to 0+}\frac{g(h)-g(0)}{h}$ 와 $\lim_{h\to 0-}\frac{g(h)-g(0)}{h}$ 값이 같아야 한다. $\lim_{h\to 0+}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{hf'(h)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=2f'(0)$, $\lim_{h\to 0-}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{(1-h)e^{-h}+\cos(h)-2}{h}$ $=\lim_{h\to 0-}\frac{\cos(h)-1}{h}+\lim_{h\to 0-}\frac{e^{-h}-1}{h}-\lim_{h\to 0-}\frac{he^{-h}}{h}=-2$ 에서 $f'(0)=-1$을 얻는다. 따라서, 위에서 얻어진 조건 $b=-2a$, $f(0)=2$, $f'(0)=-1$로부터 $f(x)=ax^3-2ax^2-x+2$ 가 된다. 곡선 $y=f(x)$의 한 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 가 되고, 이 접선이 $(0,k)$를 지난다는 조건을 활용하면 $k=-2at^3+2at^2+2$를 얻는다. 조건 (다)로부터 $\frac{k-2}{a}=-2t^3+2t^2$을 만족시키는 서로 다른 t가 세 개 존재하여야 한다. 서로 다른 t가 세 개 존재하는 k의 범위는 $0<\frac{k-2}{a}<\frac{8}{27}$이 되고, 조건 (다)의 k의 범위는 $0<k-2<\frac{8}{27}$ 이므로, $a=1$을 얻는다. 따라서, $f(x)=x^3-2x^2-x+2$를 얻는다.

하위 문항	예시 답안
2-2	$F'(x) = \lvert f(x) \rvert$ 이고 $\lvert f(x) \rvert = \begin{cases} f(x) & (0 \le x < 1) \\ -f(x) & (1 \le x \le 2) \end{cases}$ 이므로 $\int_0^2 f(x) e^{F(x)} dx = \int_0^1 f(x) e^{F(x)} dx + \int_1^2 f(x) e^{F(x)} dx$ $= \int_0^1 F'(x) e^{F(x)} dx - \int_1^2 F'(x) e^{F(x)} dx$ $= \left[e^{F(x)} \right]_0^1 - \left[e^{F(x)} \right]_1^2 = e^{F(1)} - e^{F(0)} - \left(e^{F(2)} - e^{F(1)} \right) = 2e^{F(1)} - e^{F(0)} - e^{F(2)}$ 이때 $F(0) = 0$, $F(1) = \int_0^1 f(t) dt = \frac{13}{12}$, $F(2) = \int_0^1 f(t) dt - \int_1^2 f(t) dt = \frac{3}{2}$ 이므로 $2e^{F(1)} - e^{F(0)} - e^{F(2)} = 2e^{\frac{13}{12}} - 1 - e^{\frac{3}{2}}$ 이다. $\therefore \int_0^2 f(x) e^{F(x)} dx = 2e^{\frac{13}{12}} - e^{\frac{3}{2}} - 1$
3-1	P의 좌표를 $\mathrm{P}(x, y)$라 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (8, 6)$ 과 $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = (x-5, y-3)$사이의 각을 θ라 하면 $\lvert \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}} \rvert^2 = \lvert \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}} \rvert^2 = \lvert \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \rvert^2 + \lvert \overrightarrow{\mathrm{BP}} \rvert^2 + 2(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}}$ $= \lvert \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \rvert^2 + \lvert \overrightarrow{\mathrm{BP}} \rvert^2 + 2 \lvert \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \rvert \lvert \overrightarrow{\mathrm{BP}} \rvert \cos\theta$ 이다. 따라서 $\lvert \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}} \rvert^2$의 최솟값은 $\cos\theta = -1$ 일 때 $\lvert \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}} \rvert^2 = \lvert \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \rvert^2 + \lvert \overrightarrow{\mathrm{BP}} \rvert^2 - 2 \lvert \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \rvert \lvert \overrightarrow{\mathrm{BP}} \rvert = 101 - 20 = 81$이다. $\cos\theta = -1$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = -k(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})(k > 0)$이고, $(x, y) = (5, 3) - k(8, 6)$가 원 $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 1$ 위에 있으므로 $k = \frac{1}{10}$을 얻고 P의 좌표 (x, y)는 $(x, y) = (5, 3) - k(8, 6) = (5, 3) - \frac{1}{10}(8, 6) = \left(\frac{21}{5}, \frac{12}{5} \right)$ 이다.
3-2	$\overrightarrow{\mathrm{A_1P}} + 4\overrightarrow{\mathrm{A_2P}} + \overrightarrow{\mathrm{A_3P}} = (\overrightarrow{\mathrm{A_1B}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}) + 4(\overrightarrow{\mathrm{A_2B}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}) + (\overrightarrow{\mathrm{A_3B}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}})$ $= (-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}) + 4(-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}) + (-\frac{3}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}})$ $= -\frac{12}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 6\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 6\overrightarrow{\mathrm{BP}} = -4\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 6\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 6\overrightarrow{\mathrm{BP}} = -2(2\overrightarrow{\mathrm{OA}} - 3\overrightarrow{\mathrm{OB}} - 3\overrightarrow{\mathrm{BP}})$ 이고 $\lvert \overrightarrow{\mathrm{A_1P}} + 4\overrightarrow{\mathrm{A_2P}} + \overrightarrow{\mathrm{A_3P}} \rvert^2 = 4 \lvert 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} - 3\overrightarrow{\mathrm{OB}} - 3\overrightarrow{\mathrm{BP}} \rvert^2$이고 $\lvert 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} - 3\overrightarrow{\mathrm{OB}} - 3\overrightarrow{\mathrm{BP}} \rvert^2 = \lvert 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} - 3\overrightarrow{\mathrm{OB}} \rvert^2 + \lvert 3\overrightarrow{\mathrm{BP}} \rvert^2 - 6 \lvert 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} - 3\overrightarrow{\mathrm{OB}} \rvert \lvert \overrightarrow{\mathrm{BP}} \rvert \cos\theta$ 여기서 θ는 두 벡터 $2\overrightarrow{\mathrm{OA}} - 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$가 이루는 각이다. 따라서, 구하는 최솟값은 $\cos\theta = 1$ 일 때, $4\left(\lvert 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} - 3\overrightarrow{\mathrm{OB}} \rvert^2 + \lvert 3\overrightarrow{\mathrm{BP}} \rvert^2 - 6 \lvert 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} - 3\overrightarrow{\mathrm{OB}} \rvert \lvert \overrightarrow{\mathrm{BP}} \rvert \right)$이 된다. 여기서, $2\overrightarrow{\mathrm{OA}} - 3\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2(3,3) - 3(5,3) = (-9, -3)$이므로, 이 벡터의 크기는 $\lvert 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} - 3\overrightarrow{\mathrm{OB}} \rvert = \sqrt{81+9} = \sqrt{90}$ 이 된다. 반면에, $\lvert \overrightarrow{\mathrm{BP}} \rvert = 1$이므로, 위의 식에 다 대입하면, 구하는 값은 $396 - 72\sqrt{10}$ 따라서, $(a, b) = (396, -72)$이다.

하위 문항	예시 답안
4-1	$n=2$이므로 파란색 공이 2개, 노란색 공이 3개, 진홍색 공이 6개 있을 때, 4개의 공을 택하는 경우의 수를 구해야 한다. 파란색 공, 노란색 공, 진홍색 공들 중에서 4개를 택해야 하므로 전체 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$이다. 이때 파란색 공을 3개 이상 택하는 경우와 노란색 공을 4개 택하는 경우는 일어날 수 없다. 파란색 공을 3개 이상 택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$이고, 노란색 공을 4개 택하는 경우는 수는 1이다. 이때 파란색 공을 3개 이상 택하는 경우와 노란색 공을 4개 택하는 경우는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 $15-3-1=11$이다. 혹은 다음 문제인 4-2)에서 구하는 일반항 a_n에 $n=2$을 대입해서 구하면, $a_2=11$이다.
4-2	파란색 공, 노란색 공, 진홍색 공들 중에 $2n$개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{2n}$ 다만, 파란색 공의 개수는 n개이고 노란색 공의 개수는 $2n-1$이므로, 파란색 공이 $n+1$개 이상 뽑히는 경우와 노란색 공이 $2n$개 뽑히는 경우는 일어날 수 없다. 파란색 공이 $n+1$개 이상 뽑히는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{2n-(n+1)}={}_3\mathrm{H}_{n-1}$이고 노란색 공이 $2n$개 뽑히는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{2n-2n}={}_3\mathrm{H}_0=1$이므로, 일반항 $a_n={}_3\mathrm{H}_{2n}-{}_3\mathrm{H}_{n-1}-1$이 된다. 따라서, 중복조합의 수를 구하는 공식에 의해 $a_n={}_3\mathrm{H}_{2n}-{}_3\mathrm{H}_{n-1}-1={}_{\mathrm{2n+2}}\mathrm{C}_{\mathrm{2n}}-{}_{\mathrm{n+1}}\mathrm{C}_{n-1}-1$ $=(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}(n+1)n-1=2n^2+3n+1-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-1$ $=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n=\frac{1}{2}(3n^2+5n)$
4-3	$a_n+8n+15=\frac{1}{2}(3n^2+5n+16n+30)=\frac{3}{2}(n^2+7n+10)=\frac{3}{2}(n+2)(n+5)$ $\frac{1}{a_n+8n+15}=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+5}\right)$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n+8n+15}=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{9}\times\frac{20+15+12}{60}=\frac{94}{540}=\frac{47}{270}$