2025학년도 서강대학교
모의논술 자료집 2차
- 자연계열 -

서강대학교 입학처

목 차

■ 유의사항
1. 시험시간은 50분입니다.

제시문

[가] 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

[나] 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

[다] 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때

1. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ (단, k는 상수)
2. $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
3. $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

[라] 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

[마] 함수 $f(x)$가 실수 a를 포함하는 구간에서 연속이면 이 구간에 속하는 임의의 x에 대하여

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

[바] 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

1. $\{kf(x)\}' = kf'(x)$ (단, k는 상수)
2. $\{f(x)+g(x)\}' = f'(x)+g'(x)$
3. $\{f(x)-g(x)\}' = f'(x)-g'(x)$
4. $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

문제

제시문 [가]~[다]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.

【1-1】 두 함수 $g(x), h(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 모든 $x \in (a, b)$에 대하여 $g(x) \le h(x)$일 때 $\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b h(x)\,dx$임을 보이시오.

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$를 아래와 같이 정의하자.

$$f(x) = x - \frac{1}{2}\int_0^x t^2 \cos^3(x-t)\,dt$$

제시문 [다]~[바]와 문항 【1-1】의 결과를 참고하여 다음 물음에 답하시오.

【1-2】 모든 실수 x에 대하여 $f(x) + f(-x) = 0$임을 보이시오.

【1-3】 모든 실수 x에 대하여 $|f(x) - x| \le \frac{1}{6}|x|^3$임을 보이시오.

【1-4】 $f'''(0)$의 값을 구하시오.

▢ 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

· 정적분의 정의와 기본성질 및 평균값 정리를 이용하여 정적분의 대소관계를 파악할 수 있는지 평가한다.
· 간단한 치환적분법을 이용하여 적분으로 정의된 함수의 대칭성을 보일 수 있는지 평가한다.
· 적분의 대소관계와 함수의 대칭성을 이용하여 주어진 부등식을 유도할 수 있는지 평가한다.
· 정적분과 미분의 관계를 이용하여 적분으로 정의된 함수의 도함수를 올바르게 구할 수 있는지 평가한다.

2. 문항해설

모든 제시문은 고등학교 〈수학 II〉, 〈미적분〉교과서에서 그대로 발췌하여 제시하였다. 제시문은 모든 교과서에서 공통으로 다루고 있는 정의 또는 설명으로, 학생들이 문제를 푸는 데 도움을 받을 수 있도록 구성되었다. 문제를 해결할 때 사용된 핵심 용어는 '정적분의 정의, 평균값 정리, 치환적분법, 정적분과 미분의 관계' 등으로 이는 교육과정에 모두 부합한다.

· 문항 【1-1】은 제시문 [가]에 주어진 평균값 정리와 제시문 [나]의 정적분의 정의를 활용하여 음이 아닌 함수의 정적분 값이 음이 아님을 보이고, 제시문 [다]에 설명된 정적분의 기본성질을 이용하여 정적분의 대소관계를 유도할 수 있는지를 평가하는 문항이다.
· 문항 【1-2】는 간단한 치환적분법을 활용하여 정적분으로 정의된 함수의 대칭성을 파악할 수 있는지 평가하는 문항이다.
· 문항 【1-3】은 문항 【1-1】과 【1-2】에서 얻은 결과를 이용하여 정적분으로 정의된 함수에 대한 부등식을 유도할 수 있는지를 평가하는 문항이다.
· 문항 【1-4】는 정적분과 미분의 관계를 활용하여 정적분으로 정의된 함수의 도함수를 올바르게 구할 수 있는지 평가하는 문항이다.

3. 채점기준 및 유의사항

[채점기준]

【1-1】

· 제시문 [가]와 [나]를 활용하여 음이 아닌 함수의 정적분 값이 음이 아님을 보일 수 있다.

· 제시문 [다]를 활용하여 정적분의 대소관계를 올바르게 파악할 수 있다.

【1-2】

· 간단한 치환적분법을 활용하여 정적분으로 정의된 함수의 대칭성을 파악할 수 있다.

【1-3】

· 문항 【1-1】에서 얻은 결과를 이용하여 정적분으로 정의된 함수에 대한 부등식을 변수 가 양의 실수일 때 유도할 수 있다.

· 문항 【1-2】에서 얻은 함수의 대칭성을 이용하여 그 부등식이 가 음의 실수일 때도 성립한다는 것을 보일 수 있다.

【1-4】

· 정적분과 미분의 관계를 이용하여 정적분으로 정의된 함수의 도함수를 올바르게 구할 수 있다.

[유의사항]

· 문항 【1-1】의 풀이에서 정적분의 정의와 평균값 정리를 정확하게 이용하지 않으면 감점한다.

· 문항 【1-3】의 풀이에서 변수 가 양의 실수, 음의 실수, 의 경우를 모두 고려하여야 하며, 그렇지 않을 때는 감점한다.

4. 예시답안

【1-1】 $f(x)=h(x)-g(x)$라 할 때, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 모든 $x\in(a,b)$에 대하여 $F'(x)=f(x)\ge 0$이므로 제시문 [가]에 의하여 어떤 $c\in(a,b)$에 대하여

$$F(b)-F(a)=f(c)(b-a)\ge 0$$

이다. 따라서 제시문 [나]와 [다]에 의하여

$$\int_a^b h(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)\ge 0$$

【1-2】 $u=-t$로 놓으면, 제시문 [라]에 의하여

$$\begin{aligned} f(-x)&=(-x)-\frac{1}{2}\int_0^{-x}t^2\cos^3(-x-t)\,dt\\ &=-x-\frac{1}{2}\int_0^{x}(-u)^2\cos^3(-x+u)(-1)\,du\\ &=-x+\frac{1}{2}\int_0^{x}u^2\cos^3(x-u)\,du=-f(x)\end{aligned}$$

【1-3】 x가 양의 실수라고 하자. 모든 실수 t에 대하여 $-1\le cos^3(x-t)\le 1$이므로 문항 **【1-1】**의 결과를 이용하면

$$-\frac{1}{3}x^3=\int_0^x(-t^2)\,dt\le\int_0^x t^2\cos^3(x-t)\,dt\le\int_0^x t^2\,dt=\frac{1}{3}x^3$$

이므로

$$\left|\int_0^x t^2\cos^3(x-t)\,dt\right|\le\frac{1}{3}x^3$$

이다. 따라서 임의의 양의 실수 x에 대하여

$$|f(x)-x|=\left|-\frac{1}{2}\int_0^x t^2\cos^3(x-t)\,dt\right|\le\frac{1}{6}x^3$$

이다. x가 음의 실수이면 $t=-x$가 양의 실수이므로 문항 **【1-2】**의 결과에 의하여

$$|f(x)-x|=|f(-t)-(-t)|=|f(t)-t|\le\frac{1}{6}t^3=\frac{1}{6}|x|^3$$

이다. 마지막으로 $x=0$일 때는

$$|f(x)-x|=|0-0|=0=\frac{1}{6}|x|^3$$

【1-4】 $t=x-u$로 놓으면,

$$f(x)=x-\frac{1}{2}\int_0^x u^2\cos^3(x-u)\,du=x-\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2\cos^3t\,dt$$

이므로, 제시문 [다]에 의하여

$$f(x)=x-\frac{1}{2}x^2\int_0^x \cos^3 t\,dt+x\int_0^x t\cos^3 t\,dt-\frac{1}{2}\int_0^x t^2\cos^3 t\,dt$$

따라서 제시문 [마]와 [바]에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1-x\int_0^x \cos^3 t\,dt-\frac{1}{2}x^2\cos^3 x+\int_0^x t\cos^3 t\,dt+x^2\cos^3 x-\frac{1}{2}x^2\cos^3 x \\ &= 1-x\int_0^x \cos^3 t\,dt+\int_0^x t\cos^3 t\,dt \end{aligned}$$

이고

$$f''(x)=-\int_0^x \cos^3 t\,dt-x\cos^3 x+x\cos^3 x=-\int_0^x \cos^3 t\,dt$$

이다. 그러므로

$$f'''(0)=-\cos^3 0=-1$$