3 일반 전형 자연계열(수학) 논술고사

3.1 일반 전형 자연계열(수학) 논술고사 일반정보

(1) 문항1

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 일반 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학)/문항1	
출제 범위	고등학교 과목명	수학, 수학Ⅰ, 적분과 통계
	핵심개념 및 용어	집합, 함수, 경우의 수, 순열, 조합, 수열
예상 소요 시간	35분	

(2) 문항2

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 일반 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(논술)/문항2	
출제 범위	고등학교 과목명	기하와 벡터, 적분과 통계, 수학Ⅱ
	핵심개념 및 용어	공간도형, 정사영, 함수의 그래프, 함수의 최대·최소
예상 소요 시간	35분	

3.2 일반 전형 자연계열(수학) 논술고사 기출문제

[첨부 파일 참조]

3.3 출제의도 및 문제분석

[출제의도]

고등학교 교과과정에서 배우는 집합, 함수와 함수의 그래프, 경우의 수, 조합, 미분, 최대최소, 정사영 등의 기본적인 개념, 원리를 바탕으로 출제하였다. 제시된 조건을 정확히 이해하여 문제를 분석하여 유연하게 활용할 수 있는 문제해결능력을 평가한다. 기본 개념을 정확하게 이해하고 분석하여 문제를 해결하는 논리적 사고력을 스스로 키워온 학생들이 수월하게 풀 수 있는 문제를 출제하였다.

[제시문 및 문항 분석]

[제시문 1]

집합, 함수와 함수의 그래프, 경우의 수, 조합의 개념을 이해하고 이를 활용하는 문제를 해결하는 능력을 평가한다.

[문제 1-1] 주어진 조건을 이해하여 집합의 원소의 개수를 세는 경우의 수를 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 1-2] 주어진 조건을 바탕으로 조합을 이용하여 집합의 원소의 개수를 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 1-3] 주어진 조건으로 함수를 찾고, 그 함수의 그래프를 그릴 수 있는 능력을 평가한다.

[문제 1-4] 그래프를 이용하여 수열의 합을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[제시문 2]

이 문제는 공간도형, 미분, 최대최소, 정사영 개념을 이해하고 공간 이해력을 활용하여 문제를 해결하는 능력을 평가한다.

[문제 2-1] 정사영의 개념을 이해할 수 있는지를 평가한다.

[문제 2-2] 정사영을 이용하여 도형을 찾고, 최솟값을 구하는 능력을 평가한다.

[문제 2-3] 정사영과 외접의 개념을 이용하여 주어진 도형과 주기함수를 찾고, 그 그래프를 그릴 수 있는지를 평가한다.

[문제 2-4] 정사영 된 도형을 찾고 내접하는 직사각형의 최댓값을 미분을 통해 구할 수 있는지를 평가한다.

3.4 일반 전형 자연계열(수학) 논술고사 출제 근거

3.4.1 교육과정 근거

(1) 문항1

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td>1. 교육인적자원부 고시 제2007-79호[별책8] “수학과 교육과정”</td></tr>
<tr><td>관련
성취기준</td><td>[수학]-(가)수와 연산-1 집합의 연산법칙
① 집합의 연산법칙을 이해한다.
[수학]-(나)문자와 식-1 다항식과 그 연산
② 다항식의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있다.
[수학]-(라)함수-1 함수
① 함수의 뜻을 알고, 그 그래프를 이해한다.
② 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.
[수학]-(마)확률과 통계-2순열과 조합
② 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.
[수학Ⅰ]-(다)수열-2여러 가지 수열
① $\sum$의 뜻과 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
② 여러 가지 수열의 일반항, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다.
[적분과 통계]-(나) 순열과 조합-2순열과 조합
① 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>참고자료</th><th>도서명</th><th>저자</th><th>발행처</th><th>발행년도</th><th>쪽수</th></tr>
<tr><td rowspan="3">고등학교
교과서</td><td>수학I</td><td>양승갑 외</td><td>금성출판사</td><td>2012</td><td>128</td></tr>
<tr><td>적분과 통계</td><td>계승혁 외</td><td>성지출판사</td><td>2010</td><td>87</td></tr>
<tr><td>수학</td><td>김서령 외</td><td>천재교육</td><td>2010</td><td>74, 228,
235, 338</td></tr>
</table>

(2) 문항2

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td>1. 교육인적자원부 고시 제2007-79호[별책8] “수학과 교육과정”</td></tr>
<tr><td>관련
성취기준</td><td>[수학]-(라)함수-1 함수
① 함수의 뜻을 알고, 그 그래프를 이해한다.
[수학Ⅱ]-(마)미분법-3 여러 가지 함수의 미분법
③ 매개변수로 나타내어진 함수를 미분할 수 있다.
[수학Ⅱ]-(마)미분법-4 도함수의 활용
③ 함수의 증가와 감소를 이해하고, 이를 판정할 수 있다.
④ 함수의 극대와 극소를 이해하고, 이를 판정할 수 있다.
[기하와 벡터]-(다)공간도형과 공간좌표-1 공간도형
③ 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
[기하와 벡터]-(라)벡터-3 직선과 평면의 방정식
② 좌표공간에서 평면의 방정식을 구할 수 있다.
[적분과 통계]-(가)적분법-1 부정적분
⑥ 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
</table>

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	우정호 외	두산동아	2010	21, 144, 192
	적분과 통계	계승혁 외	성지출판사	2010	17
	기하와 벡터	김수환 외	교학사	2010	90, 97, 104

3.5 일반 전형 자연계열(수학) 논술고사 고교 교사 검토의견

● **출제참여 고교교사 의견**

[고교교육과정 내 출제 기준에 대한 의견]

[제시문1]의 [가], [나]에서는 집합 $A_n = \left\{ \frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \cdots, \frac{2^n - 1}{2^n} \right\}$의 모든 원소가 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n}$의 꼴로 나타내어질 수 있으며, 이로부터 집합 A_n을 정의역으로 하고 집합 $\{0, 1\}$을 공역으로 하는 함수 f_j를 정의하고 있다. 또한, 제시문 [다]에서는 제시문 [나]에서 정의된 함수 f_j에 대하여 함수 g_j를 정의하였다. 2012학년도 이후부터 연세대학교 논술문항에서 집합에 대한 문항을 출제하였으므로 논술고사를 치르는 학생들에게 익숙한 형태의 제시문일 것으로 판단된다. 집합 A_n을 정의역으로 하는 함수 f_j를 이해하는 것이 중요한데, 논제[1-1]과 논제[1-2], 논제[1-3]을 해결하면서 이해할 수 있게 될 것이다. 논제[1-4]은 난이도가 높은 문항이며 논제[1-3]의 결과로부터 $\sum_{k=1}^{2^n} g_i\left(\frac{k-1}{n}\right) g_j\left(\frac{k-1}{n}\right) = 0$을 유추할 수 있는지 평가하는 문항이다.

[제시문2]는 좌표공간의 반구면 $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \ge 0\}$을 x축으로 t만큼 회전하는 과정에서 $z \ge 0$인 부분을 정사영시킨 도형 R_t에 대하여 이해할 수 있는지 평가하는 문항이다. 또한, R_t에 외접하는 직사각형의 최소 넓이 $f(t)$, R_t에 내접하는 직사각형의 최대 넓이 $g(t)$에 대하여 다루고 있다.
논제[2-1]은 제시문의 상황을 이해하고 있는지 묻는 간단한 문항이며, 논제[2-2]와 [2-3]은 실수 t에 따른 함수 $f(t)$, $g(t)$를 이해하고 그릴 수 있는지 평가하는 문항으로 평가 난이도는 중 또는 중상 수준으로 판단된다. 논제 [2-4]은 무리함수의 미분법, 무리방정식 등의 개념을 이용하여 특정한 t값에 대한 $g(t)$의 값을 구하는 문항으로 정확한 풀이와 계산에 의해 해답을 찾을 수 있는지 평가하는 높은 난이도를 가지고 있다.

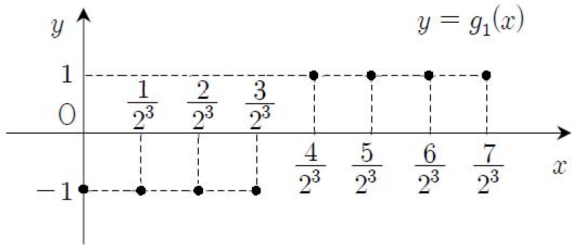
● **선행학습 영향평가위원회 교사위원 검토의견**

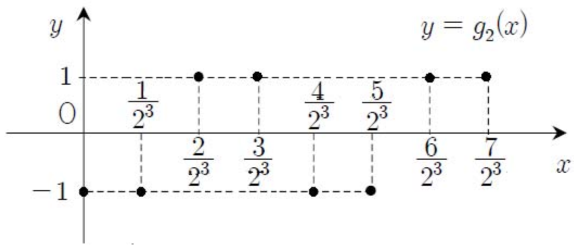
[문제 분석]

[제시문1]

논제 <1-1>은 [제시문1]의 (가)와 (나)를 읽고 이해할 수 있는지를 묻는 문항이다. 학생들은 집합 A_n의 원소인 어떤 수 x를 $x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_n}{2^n}$로 표현하는 과정에서 제시문을 이해하고 다음 논제로의 접근이 친숙해질 수 있도록 도움을 줄 수 있다. 특히, 논제 <1-2>에서는 앞의 논제에 대하여 $n = 10$인 경우의 한 예를 생각할 수 있게 하며 조합 또는 집합의 원소의 개수를 구하는 방법을 통하여

수학적 창의성(유연성)을 평가할 수 있는 문항이다. 논제 〈1-1〉은 $f_1(x)=1$의 의미가 무엇인지 평가하고 있으며, 논제 〈1-2〉는 $f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_6(x)=4$의 의미가 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6=4$인 집합 $\{a_1, a_2, \cdots, a_6\}$의 개수를 묻고 있다는 것을 파악하고 있는지 평가한다. 따라서 그 답은 ${}_6\mathrm{C}_4$이고 집합 $\{a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$의 개수는 2^4이므로 확률과 통계의 곱의 법칙에 의하여 조건을 만족시키는 구하는 집합의 개수는 ${}_6\mathrm{C}_4\times 2^4=15\times 16=240$이다. 따라서 논제 〈1-1〉과 논제 〈1-2〉는 학생들이 제시문을 이해하고 있는지와 그 이해를 도울 수 있는 문항으로 논제 제시의 순서에도 적합하다.
논제 〈1-3〉은 [제시문1]의 (다)에서 $n=3$일 때 두 함수 $f_j(x)$와 $g_j(x)\,(j=1, 2, 3)$의 관계를 이해하고 있는지 묻는 문항이다. 학생들은 집합 $A_3=\left\{0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8} \cdots, \frac{7}{8}\right\}$에서 $j=1, 2, 3$인 각각의 경우에 대하여 함수 $g_j(x)$가 $g_1(x)$ 또는 $g_2(x)$ 또는 $g_3(x)$로 존재하게 된다는 것을 파악하고 이 중 $j=1, 2$인 함수 $g_1(x)$의 그래프와 함수 $g_2(x)$의 그래프를 답안지에 나타내어야 한다. 이 과정에서 집합 A_3에 속하는 모든 원소 α에 대하여 $f_j(\alpha)\,(j=1, 2)$의 값을 구하고 이로부터 $g_j(\alpha)$의 값을 구할 수 있다. 이 과정은 간단한 함수의 뜻과 $g(\alpha)=\beta$를 만족시키는 점 (α, β)를 좌표평면 위에 나타내는 과정을 반복하는 것이므로 고등학교 1학년 과정의 함수 영역의 내용을 벗어나지 않고, 연세대학교에 지원한 학생 수준의 학생들이 어렵지 않게 해결했을 것으로 판단된다. 위의 내용을 종합하여 두 함수 $g_1(x)$, $g_2(x)$를 좌표평면 위에 나타내면 그림과 같다.

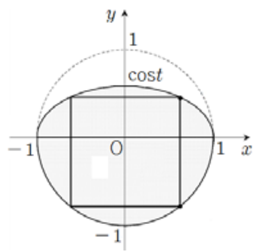




논제 〈1-4〉는 $n=3$인 논제 〈1-3〉의 풀이로부터 일반화된 함수의 성질을 추론할 수 있는지를 묻고 있는 난이도가 높은 문항이다. 연세대학교를 지원한 학생들에게는 이 문항의 풀이에서 가장 큰 변별력 차이를 보였을 것으로 예상한다. $\sum$의 성질을 이용하여 $\sum_{k=1}^{2^n}\left\{g_1\left(\frac{k-1}{2^n}\right)+g_2\left(\frac{k-1}{2^n}\right)+\cdots+g_m\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right\}^2$를 전개하고 논제 〈1-3〉의 풀이로부터 규칙성을 찾아야 하는 문제이다. $m\le n$일 때, 위에서 구하는 값은 집합 A_n의 모든 원소 x에 대하여 $\left[(g_1(x))^2+(g_2(x))^2+(g_3(x))^2+\cdots+(g_m(x))^2\right.$ $\left.+2\{g_1(x)g_2(x)+g_1(x)g_3(x)+\cdots+g_i(x)g_j(x)+\cdots+g_{m-1}(x)g_m(x)\}\right]$ $(1\le i<j\le m)$의 모든 합을 의미한다. 또한, $n=3$일 때, 집합 A_3에서 집합 $\{-1, 1\}$로 가는 함수 $g_i(i=1,2,3)$로부터 A_n에 대한 규칙성을 분석하여 $\sum_{x\in A_n} g_i(x)g_j(x)=0\ \ (1\le i<j\le m)$임을 파악할 수 있는지를 평가하는 문항이다. 이 문제는 연세대학교에 응시한 학생들을 변별하기에 적절한 문항이라 판단되며 고등학교 교육과정 내 수준에서 연역적 추론 능력을 평가할 수 있는 문항이다.

[제시문2]는 수학 II의 함수와 기하와 벡터 영역의 공간도형, 적분과 통계의 적분법에서 출제된 문항이다. 학생들에게 익숙한 구 $x^2+y^2+z^2=1$를 소재로 회전하는 입체에 대한 평면으로의 정사영된 도형에 대하여 정의된 최솟값과 최댓값의 함수를 정의하고 그 함수의 함숫값을 묻고 있다. 공간도형을 중심으로 함수의 증가와 감소를 파악함으로써 공간인지 능력과 유연한 수학적 사고능력, 다양한 영역의 교육과정 내용을 포함하는 문항이라 판단된다.

논제 <2-1>은 $t=\frac{\pi}{2}$일 때 도형 R_t의 모양이 반지름의 길이가 1인 반원임을 알고 있는지 묻고 있으며 학생들이 제시문을 이해하고 있는지 평가하는 간단한 문제이다. 논제 <2-2>는 모든 실수 t에 대하여 변화하는 도형 R_t의 모양으로부터 함수 $f(t)$가 어떻게 정의되는지 대수적으로 분석하고, 함수 $f(t)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내는 문항이다. 따라서 교육과정 안에서 함수의 기본 개념을 충실히 학습한 학생들은 실수 t에 대한 함수 $f(t)$의 그래프를 실수 t의 범위에 따라 어렵지 않게 구했을 것으로 판단된다.



논제 <2-3>은 $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$일 때, 그림과 같은 모양의 R_t에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값 $g(t)$를 구하는 문제이다. 한 사분면 위의 꼭짓점을 기준으로 넓이를 구하고, 그 꼭짓점을 결정하는 매개변수의 변화에 대한 함수 $g(t)$의 최댓값을 구할 수 있으며, 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 교육과정의 내용을 포함하고 있으므로 교육과정 내에서 출제되었다.
논제 <2-4>는 도형 R_t의 넓이가 주어졌을 때의 $g(t)$값을 구하는 문제이다. 이 문제는 무리함수의 미분법, 무리방정식, 도함수의 활용 등을 이용하여 해결할 수 있는 문항이며, 문제의 이해와 더불어 적당한 계산력을 요구하고 있다. $\frac{3-\sqrt{3}}{6} < \frac{1}{2}$이므로 $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$에서만 생각할 수도 있는 등 풀이 방법이 다양하므로 수리논술의 취지에 부합하며, 학생들의 다양한 사고력과 문제해결력을 평가하는데 적합한 문항이다.

[평가]

2016학년도 연세대학교 일반 전형 자연계열(수학) 논술고사 문제는 2014년 이전의 기출 문제와 비교하여 학생들의 체감 난이도가 낮아졌으며, 많은 학생들이 쉽게 접근할 수 있는 문제였다. 2015학년도 기출문제와 내용 및 난이도 면에서 비슷했다고 판단되며, 고교 교육과정 내에서 출제하려고 노력한 것을 느낄 수 있었다. 특히, 2015학년도 [제시문2]에서의 공간도형 및 공간 벡터 문제와 2016학년도 [제시문2]번 문항을 비교하였을 때, 교과영역이 비슷하고 난이도 역시 비슷하거나 오히려 낮아져서 학생들이 문제를 해결하는데 익숙하게 접근했을 것으로 예상된다. 오히려 논술고사를 치르는 대학 중 학업성취도가 높은 상위권 학생들이 가장 선호하는 대학임을 고려할 때, 엄격한 교육과정의 잣대로 인하여 사고력을 평가하는 문항의 난이도가 너무 낮아진다면 출제의 의도와 목적에 맞지 않음으로써 또 다른 혼선이 있을 수도 있다는 우려가 있다.

종합적으로 평가한다면 2016학년도 기출 문제는 고교 교육과정 내에서 출제되었으며, 난이도와 내용 면에서 사교육을 받은 학생들이 더 유리할 요소가 있다고 할 수 없고, 학교 수업에서 수학 내용을 충실하게 학습한 학생들이 해결하기에 적당한 문항이었다.