2015학년도 연세대학교 모의논술 문제(수학)

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

(가) 한국 팀이 A, B, C 팀과의 개별 경기에서 이길 확률은 각각 $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{10}$이다. 또한 A, B, C 팀과 비길 확률은 각각 $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$ 이다.

(나) 한국 팀이 A, B, C 팀과 조별 경기를 한다고 하자. 한국 팀이 첫 경기에서 A, B, C 각 팀과의 이길 확률과 비길 확률은 개별 경기의 확률과 같다. 두 번째, 세 번째 경기에서 한국 팀이 이길 확률은 바로 앞서 벌어진 경기의 결과에 따라 다음과 같이 영향을 받는다.

▶직전 경기에서 이긴 경우, 다음 경기에서 이길 확률은 개별 경기에서 이길 확률의 1.3배이다.

▶직전 경기에서 비긴 경우, 다음 경기에서 이길 확률은 개별 경기에서 이길 확률의 1.1배이다.

▶직전 경기에서 진 경우, 다음 경기에서 이길 확률은 개별 경기에서 이길 확률의 0.9배이다.

▶비기는 확률은 직전 경기의 결과에 영향을 받지 않고 개별 경기에서 확률과 같다.

[1-1] 한국 팀의 조별 경기가 A팀, B팀, C팀의 순서로 정하여졌다. 한국 팀이 B팀과의 경기에서 질 확률을 구하시오. [8점]

[1-2] 한국 팀의 조별 경기가 A팀, B팀, C팀의 순서로 정하여졌다. 한국 팀이 B팀과의 경기에서 지지 않았을 때, 모든 경기에서 지지 않으면서 두 경기 이상 이길 확률을 구하시오. [8점]

[1-3] 조별 경기 순서를 추첨을 통하여서 결정하였을 때, 한국 팀이 첫 번째 경기를 지고, 두 번째 경기는 비기고, 마지막 경기는 이겼다고 한다. 이런 경우가 일어날 확률이 가장 높은 한국 팀의 경기 순서를 찾고 그 이유를 설명하시오. [8점]

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합 R을 정의역과 공역으로 갖는 연속 함수이다.

포물선 $y=x^2+px$을 생각하자. 함수 $y=x^2+px-f(x)$는 상수 p의 값에 따라 최솟값을 가질 수도 가지지 않을 수도 있다. 집합 A를 다음과 같이 정의한다.

$A=\{p\in R \mid x^2+px-f(x)\text{가 최솟값을 가진다.}\}$

함수 $F(p)$는 $p\in A$에 대하여 $x^2+px-f(x)$의 최솟값을 대응하는 함수이다. 집합 B를 다음과 같이 정의한다.

$B=\{t\in R \mid \text{어떤 } p\in A\text{에 대하여 } x^2+px-f(x)\text{는 } x=t\text{에서 최솟값을 갖는다.}\}$

(나) 연속 함수 $g(x)$에 대하여 부등식 $g(x)\ge f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 성립하고 등호는 단 한 점에서만 성립하면 곡선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$의 위쪽에서 단 한 번 만난다고 한다.

(다) 두 실수 a,b에 대하여 $\min(a,b)$는 다음과 같이 정의한다.

$$\min(a,b)=\begin{cases} a, & a\le b \\ b & a>b \end{cases}$$

[2-1] 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 모든 실수에 대하여 존재하고 또한 연속이라고 가정하자.
집합 $A=\{1\}$이고 $B=(-\infty,\infty)$인 함수 $f(x)$를 모두 찾고 그 이유를 설명하시오.
집합 $A=(0,\infty)$인 함수 $f(x)$가 존재하는지를 판단하고 그 이유를 설명하시오. [8점]

[2-2] 포물선 $y=x^2$을 x축과 y축의 양의 방향으로 각각 a와 b만큼 평행이동 하면 곡선 $y=f(x)$의 위쪽에서 단 한 번 만난다고 하자. 이 정보만을 가지고 집합 A의 원소 p를 최소한 1개 찾아서 a,b에 대한 식으로 표현하고 $F(p)$를 구하시오. [8점]

[2-3] 함수 $f(x)$의 최댓값이 존재한다고 가정하자. 이 때 집합 A를 구하고 그 이유를 설명하시오. [8점]

[2-4] 함수 $f(x)=\min(ax+b,cx+d)$에 대하여 (단, $a<c$) 집합 A와 B를 찾고, $F(p)$를 a,b,c,d와 p에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

1. 출제의도

- 고등학교 수학교과과정내의 기본적인 정의, 개념, 원리에 대한 정확한 이해력, 논리적인 분석력, 계산 능력 그리고 이를 토대로 추론능력을 평가한다.

- 제시된 조건을 정확히 이해하여 문제를 분석하여 적용하고 응용할 수 있는 문제해결능력을 평가한다.

- 고등학교 교과과정을 바탕으로 기본 개념을 정확하게 이해하고 분석하여 문제를 해결하는 논리적 사고력을 스스로 키워온 학생들이 수월하게 풀 수 있는 문제를 출제하였다.

2. 제시문 설명 및 문항 분석

가. 제시문1

확률의 개념과 확률이 직전 사건에 영향을 받는다는 조건을 정확히 이해하여 여사건, 조건부확률에 관한 문제를 해결하는 능력을 평가한다.

문제	문항분석
문제 1-1	제시문에서 확률이 직전사건에 영향을 받는다는 조건을 이해하고 여사건 개념을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.
문제 1-2	문제 1-1과 연계하여 여사건과 조건부확률의 개념을 이해하는지 평가한다.
문제 1-3	제시문에서 주어진 조건이 일부 확률적으로 독립이란 사실을 활용할 수 있는지 평가한다.

나. 제시문2

이 문제는 집합의 개념 및 함수와의 관계를 이해하고 최대최소와 관련하여 미분을 활용할 수 있는지 평가하는 문제이다. 또한 추론을 통하여 함수에 대한 이해도를 측정하는 문제이다.

문제	문항분석
문제 2-1	제시문에서 주어진 집합을 정확하게 이해하는지 평가하는 문제이다. 미분가능한 함수가 최솟값을 가지는 점에서 미분계수가 0임을 활용할 수 있는지 평가한다. 고등학교과정에 등장하는 여러 함수의 성질을 이 문제에 적용할 수 있는지를 묻는다.
문제 2-2	제시문에서 정의한 집합을 평행이동과 연관하여 함수의 그래프 사이의 관계로 이해할 수 있는지 묻는다.
문제 2-3	포물선의 성질과 함수의 개형을 이해하여 최대최소에 활용할 수 있는지 묻는다.
문제 2-4	문자를 활용한 대수적인 계산능력 및 미분이 불가능한 점이 있는 경우 최대최소에 활용할 수 있는지 평가한다.

※ 아래의 예시답안은 핵심만을 간략히 기술한 것으로서 참고로만 활용하기 바랍니다. 예시답안과 다른 다양한 풀이 형태도 있을 수 있음을 알립니다.

문제 [1-1]

■ 1) 첫 번째 경기를 이기고 두 번째 경기를 지는 경우의 확률: $\frac{1}{5}\times(1-\frac{3}{5}\times\frac{13}{10}-\frac{1}{5})=\frac{1}{250}$

2) 첫 번째 경기를 비기고 두 번째 경기를 지는 경우의 확률: $\frac{2}{5}\times(1-\frac{3}{5}\times\frac{11}{10}-\frac{1}{5})=\frac{14}{250}$

3) 첫 번째 경기를 지고 두 번째 경기를 지는 경우의 확률: $\frac{2}{5}\times(1-\frac{3}{5}\times\frac{9}{10}-\frac{1}{5})=\frac{26}{250}$

따라서 두 번째 경기를 질 확률은 $\frac{1}{250}+\frac{14}{250}+\frac{26}{250}=\frac{41}{250}$.

문제 [1-2]

■ 문제 [1-1]에 의해 B팀과의 경기에서 지지 않을 확률은 $1-\frac{41}{250}=\frac{209}{250}$이다.

한국 팀이 B팀과의 경기에서 지지 않았을 때, 모든 경기에서 지지 않으면서 두 경기 이상 이길 경우

첫 번째 경기	두 번째 경기	세 번째 경기	확률
승	승	승	$\frac{1}{5}\times(\frac{3}{5}\times\frac{13}{10})\times(\frac{1}{10}\times\frac{13}{10})=\frac{507}{25000}$
무	승	승	$\frac{2}{5}\times(\frac{3}{5}\times\frac{11}{10})\times(\frac{1}{10}\times\frac{13}{10})=\frac{858}{25000}$
승	무	승	$\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times(\frac{1}{10}\times\frac{11}{10})=\frac{11}{2500}=\frac{110}{25000}$
승	승	무	$\frac{1}{5}\times(\frac{3}{5}\times\frac{13}{10})\times\frac{1}{5}=\frac{780}{25000}$
합			$\frac{507+858+110+780}{25000}=\frac{2255}{25000}=\frac{451}{5000}$

한국 팀이 B팀과의 경기에서 지지 않았을 때, 모든 경기에서 지지 않으면서 두 경기 이상 이길 확률은 $\dfrac{\frac{451}{5000}}{\frac{209}{250}}=\frac{41}{380}$이다.

문제 [1-3]

■ 두 번째 경기가 비겼으므로 앞 경기에 영향을 받지 않는 독립적인 사건이다. 그리고 마지막 경기에서 승리 할 확률은 공통적으로 1.1배가 곱해지므로 지고, 비기고, 이기는 각 경우가 가장 높은 상황을 택하면 되므로 C-A-B 경우이다.

[별해] 추첨을 통해 나올 수 있는 경기의 가지 수는 총 여섯 가지, 즉 A-B-C, A-C-B, B-A-C, B-C-A, C-A-B, C-B-A이다. 각 경우에서 첫 번째 경기를 지고, 두 번째 경기를 비기고 세 번째 경기를 이길 확률을 구하면 $\frac{22}{2500}$, $\frac{132}{2500}$, $\frac{22}{2500}$, $\frac{22}{2500}$, $\frac{462}{2500}$, $\frac{77}{2500}$이므로 정답은 C-A-B 경우이다.

문제 [2-1]

■ $A=\{1\},\ B=(-\infty,\infty)$ 라면 $x^2+x-f(x)$가 상수여야 한다. 따라서 $f(x)=x^2+x+C$.

■ $g(x)=f'(x)-2x$ 라고 하자. $p\in A$ 라면 $p=g(x)$인 x가 존재하여야 한다.
따라서, $p\in A$인 필요조건은 p가 $g(x)$의 치역에 들어가는 것이다.
예를 들어 $g(x)=e^{-x}$라 하면 $f(x)=x^2-e^{-x}$이고, 이 때 $A=(0,\infty)$임을 확인할 수 있다.

문제 [2-2]

■ $(x-a)^2+b-f(x)$가 최솟값 0을 가짐을 유추할 수 있다.
따라서 $x^2-2ax-f(x)\geq -a^2-b$ 이므로 $p=-2a$일 때 $F(p)=-a^2-b$이다.

문제 [2-3]

■ 상수 C가 $f(x)$의 최댓값보다 크다면 모든 실수 p에 대하여 부등식 $x^2+px+\dfrac{p^2}{4}+C>f(x)$가 성립한다.
포물선 $y=x^2+px+\dfrac{p^2}{4}+C$ 을 y축의 아랫방향으로 평행이동하면 $y=f(x)$와 최초로 만날 것이다.
따라서 모든 실수 p에 대하여 $F(p)$가 존재하고 $A=(-\infty,\infty)$ 이다.

문제 [2-4]

■ 두 직선 $y=ax+b$와 $y=cx+d$의 교점을 $\alpha=\dfrac{b-d}{c-a}$라 하자.
$x^2+px-f(x)$의 최솟값은 $x=\alpha$ 또는 $2x+p-f'(x)=0$인 점에서 발생한다.

$$2x+p-f'(x)=\begin{cases}2x+p-c, & x<\alpha\\ 2x+p-a, & x>\alpha\end{cases}$$

이므로

▶ $x<\alpha,\ 2x+p-c=0$ 이면, $p>c-2\alpha$ 이고, $x=\dfrac{c-p}{2}$에서 $x^2+px-f(x)=-\dfrac{(p-c)^2}{4}-d$ 이다.

▶ $x>\alpha,\ 2x+p-a=0$ 이면, $p>a-2\alpha$ 이고, $x=\dfrac{a-p}{2}$에서 $x^2+px-f(x)=-\dfrac{(a-p)^2}{4}-b$ 이다.

▶ $x=\alpha$ 에서는 $x^2+px-f(x)$의 값은 $\alpha^2+p\alpha-\dfrac{bc-ad}{c-a}$이다.

그런데, $-\dfrac{(p-c)^2}{4}-d-\alpha p-\alpha^2+\dfrac{bc-ad}{c-a}=-\dfrac{1}{4}(p+2\alpha-c)^2\leq 0$ 이고 마찬가지로

$-\dfrac{(p-a)^2}{4}-b-\alpha p-\alpha^2+\dfrac{bc-ad}{c-a}=-\dfrac{1}{4}(p+2\alpha-a)^2\leq 0$ 이므로

$$F(p)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4}(p-a)^2-b, & p<a-2\dfrac{b-d}{c-a}\\ \dfrac{b-d}{c-a}p+\left(\dfrac{b-d}{c-a}\right)^2-\dfrac{bc-ad}{c-a}, & a-2\dfrac{b-d}{c-a}\leq p\leq c-2\dfrac{b-d}{c-a}\\ -\dfrac{1}{4}(p-c)^2-d, & p>c-2\dfrac{b-d}{c-a}\end{cases}.$$

따라서 $A=(-\infty,\infty)$이다. 또한 $B=(-\infty,\infty)$이다.