2019학년도 서울시립대학교 자연계열 모의 논술고사 해설

[문제 1] (100점)

모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{n^n \cdot n!}{(2n)!} \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

[예시답안]

$n=2m$ (m은 자연수)이면,

$$\frac{n^n \cdot n!}{(2n)!} = \frac{n}{2n} \cdot \frac{n}{2n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{2n-(m-1)} \cdot \frac{n}{n+1+(m-1)} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}$$

이다. 이제

$$\frac{n}{2n} \cdot \frac{n}{n+1} \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2, \quad \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{n}{n+2} \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2, \quad \cdots, \quad \frac{n}{2n-(m-1)} \cdot \frac{n}{n+1+(m-1)} \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

가 성립함을 보이자. $k=0, 1, \cdots, m-1$에 대하여 $n-1-k \ge 2m-1-(m-1) = m \ge 0$이므로

$$2n^2+2n+k(n-1-k) \ge 2n^2$$

이다. 즉 $k=0, 1, \cdots, m-1$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\frac{n}{2n-k} \cdot \frac{n}{n+1+k} = \frac{n^2}{2n^2+2n+nk-k-k^2} \le \frac{n^2}{2n^2} \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

따라서

$$\frac{n^n \cdot n!}{(2n)!} \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2m} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

이다.

그리고 $n=1$이면 위 부등식은 성립한다. $n=2m-1$ (m은 2 이상의 자연수)이면,

$$\frac{n^n \cdot n!}{(2n)!} = \frac{n}{2n} \cdot \frac{n}{2n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{2n-(m-2)} \cdot \frac{n}{2n-(m-1)} \cdot \frac{n}{n+1+(m-2)} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}$$

이고, $k=0, 1, \cdots, m-2$에 대하여 $n-1-k \ge 2m-1-1-(m-2) = m \ge 0$이므로

$$\frac{n}{2n-k} \cdot \frac{n}{n+1+k} = \frac{n^2}{2n^2+2n+nk-k-k^2} \le \frac{n^2}{2n^2} \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

이다. 또한

$$\frac{n}{2n-(m-1)} = \frac{2m-1}{3m-1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3m-1} \le \frac{2}{3} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

이므로,

$$\frac{n^n \cdot n!}{(2n)!} \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2(m-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

이다.

[문제 2] (100점)

자연수 n에 대하여 $a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$라 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(a) $0 \le x \le 1$일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라. (40점)

$$1 + \sum_{k=1}^{2n-1} (-x)^k \le \frac{1}{1+x} \le 1 + \sum_{k=1}^{2n} (-x)^k$$

(b) $\lim_{n \to \infty} a_n$의 값을 구하여라. (60점)

[예시답안]

(a) $x \neq -1$이므로

$$1 + \sum_{k=1}^{2n-1} (-x)^k = 1 + \frac{-x(1-(-x)^{2n-1})}{1-(-x)} = \frac{1+x-x-x^{2n}}{1+x} = \frac{1-x^{2n}}{1+x}$$

이고

$$1 + \sum_{k=1}^{2n} (-x)^k = 1 + \frac{-x(1-(-x)^{2n})}{1-(-x)} = \frac{1+x-x+x^{2n+1}}{1+x} = \frac{1+x^{2n+1}}{1+x}$$

이다. 한편 $0 \le x \le 1$이면, $1-x^{2n} \le 1 \le 1+x^{2n+1}$이고 $1+x>0$이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{1-x^{2n}}{1+x} \le \frac{1}{1+x} \le \frac{1+x^{2n+1}}{1+x}$$

따라서

$$1 + \sum_{k=1}^{2n-1} (-x)^k \le \frac{1}{1+x} \le 1 + \sum_{k=1}^{2n} (-x)^k$$

이다.

(b) a_n은 적분을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \int_0^1 (-x)^{k-1} dx = \int_0^1 \left(1 + \sum_{k=1}^{2n-1} (-x)^k\right) dx$$

따라서 문항 (a)의 첫 번째 부등식에 의해

$$a_n \le \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln 2$$

이다. 또한

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 \left(1 + \sum_{k=1}^{2n-1} (-x)^k\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(1 + \sum_{k=1}^{2n} (-x)^k\right) dx - \int_0^1 x^{2n} dx \\ &= \int_0^1 \left(1 + \sum_{k=1}^{2n} (-x)^k\right) dx - \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

이므로, 문항 (a)의 두 번째 부등식에 의해

$$a_n \ge \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2n+1} = \ln 2 - \frac{1}{2n+1}$$

이다. 따라서

$$\ln 2 - \frac{1}{2n+1} \le a_n \le \ln 2$$

이므로 수열의 극한값의 대소 관계에 의해 $\lim_{n \to \infty} a_n = \ln 2$이다.

[문제 3] (100점)
주사위를 k번 던져서 나온 눈의 최솟값을 a, 최댓값을 b라 할 때, 다음 물음에 답하여라. (단, $k \geq 2$이다.)
(a) $b-a=3$인 경우의 수를 구하여라. (50점)
(b) 처음 던진 주사위의 눈이 5가 나왔을 때, $b-a=3$일 확률을 구하여라. (50점)

[예시답안]
(a) $b-a=3$인 순서쌍 (a,b)는 (1,4), (2,5), (3,6)으로 3개이며, 그 사건을 각각 A_1, A_2, A_3라 하자. $n(A)$를 사건 A가 일어나는 경우의 수라 할 때, $b-a=3$인 경우의 수는 $n(A_1)+n(A_2)+n(A_3)$이다. $(a,b)=(1,4)$인 경우에, 모든 주사위의 눈이 1씩 더 나온다면 $(a,b)=(2,5)$인 경우가 된다. 즉, $n(A_1)=n(A_2)$이다. 같은 방법으로 $n(A_2)=n(A_3)$이다. 따라서 $b-a=3$인 경우의 수는

$$3 \cdot n(A_1) \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. $n(A_1)$를 구하기 위해 다음의 사건을 정의하자.

- B = 주사위를 k번 던져서 나온 모든 눈이 1 이상 4 이하인 사건
- C = 주사위를 k번 던져서 나온 모든 눈이 2 이상 4 이하인 사건
- D = 주사위를 k번 던져서 나온 모든 눈이 1 이상 3 이하인 사건

이때 $A_1 = B-(C\cup D)$, $C\cup D \subset B$이므로 $n(A_1)=n(B)-n(C\cup D)$이다.
또한 $n(B)=4^k$, $n(C)=3^k$, $n(D)=3^k$이고 $C\cap D$는 주사위를 k번 던져서 나온 모든 눈이 2 또는 3인 사건이므로 $n(C\cap D)=2^k$이다. 따라서 $n(C\cup D)=n(C)+n(D)-n(C\cap D)=3^k+3^k-2^k$이므로 $n(A_1)=4^k-2\cdot 3^k+2^k$이다.
그러므로 식 ①에 대입하면 $b-a=3$인 경우의 수는

$$3\cdot(4^k-2\cdot 3^k+2^k)$$

이다.
(b) $b-a=3$인 사건을 E, 처음 던진 주사위의 눈이 5가 나온 사건을 F라 하자. $\mathrm{P}(E\cap F)=\dfrac{n(E\cap F)}{6^k}$이고 $\mathrm{P}(F)=\dfrac{1}{6}$이므로, 처음 던진 주사위의 눈이 5가 나왔을 때, $b-a=3$일 확률은

$$\mathrm{P}(E|F)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(F)}=\frac{n(E\cap F)}{6^{k-1}}$$

이다. 처음 던진 주사위의 눈이 5가 나왔을 때, $b-a=3$인 순서쌍 (a,b)는 (2,5) 또는 (3,6)이어야 한다. 즉, 사건 $E\cap F$가 일어나는 경우는 첫 번째 주사위를 던진 이후에 주사위를 $k-1$번 던져 나온 눈의 최솟값과 최댓값의 순서쌍이 (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,6)일 때이다. 이 때, 각각의 사건을 G_1, G_2, G_3, G_4, G_5라 하자. 그러면 $n(E\cap F)=n(G_1)+n(G_2)+n(G_3)+n(G_4)+n(G_5)$이므로

$$\mathrm{P}(E|F)=\frac{n(G_1)+n(G_2)+n(G_3)+n(G_4)+n(G_5)}{6^{k-1}}$$

이다. G_1은 $k-1$번 던져 나온 모든 주사위의 눈이 2가 나오는 사건이므로 $n(G_1)=1$이다. $n(G_2)$, $\cdots$, $n(G_5)$를 문항 (a)와 같은 방법으로 구하면,

$$n(G_2)=2^{k-1}-2$$
$$n(G_3)=3^{k-1}-2\cdot 2^{k-1}+1$$
$$n(G_4)=n(G_5)=4^{k-1}-2\cdot 3^{k-1}+2^{k-1}$$

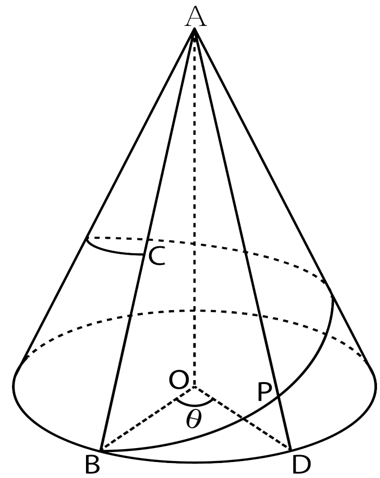
이다. 따라서 처음 던진 주사위의 눈이 5가 나왔을 때, $b-a=3$일 확률은

$$\frac{2\cdot 4^{k-1}-3^k+2^{k-1}}{6^{k-1}}$$

이다.

[문제 4] (100점)

중심이 점 O, 반지름의 길이가 2인 원을 밑면으로 하고, 모선의 길이가 8인 직원뿔이 있다. 이 원뿔의 꼭짓점을 A, 밑면의 경계인 원에 있는 임의의 점을 B, $\overline{\mathrm{AC}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$을 만족하는 선분 AB의 점을 C라 하자. 점 P는 점 B에서 점 C까지 원뿔을 한 바퀴 감는 최단거리 곡선에서 움직이고 있다. 직선 AP가 밑면과 만나는 점을 D라 하고, $\angle \mathrm{BOD}=\theta$라 할 때, 다음 물음에 답하여라.

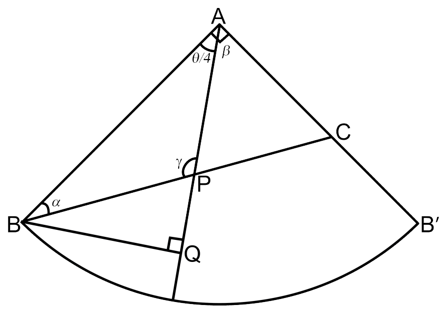


(a) 곡선 BP의 길이를 θ에 관한 식으로 나타내어라. (60점)

(b) 곡선 BP의 길이를 $f(\theta)$라 할 때, 도함수 $\frac{df}{d\theta}$가 최소가 되는 θ의 값을 구하여라. (40점)

[예시답안]

(a) 원뿔을 모서리 AB를 따라서 전개하면 오른쪽 그림과 같은 부채꼴이 된다. 원뿔에서 점 P가 점 B에서 점 C까지의 최단거리 곡선에 있으므로, 점 P는 전개도에서 선분 BC에 있다. $\alpha=\angle \mathrm{ABC}$, $\beta=\angle \mathrm{BAC}$, $\gamma=\angle \mathrm{BPA}$라 하자. 부채꼴의 호의 길이와 밑면인 원의 둘레의 길이가 같으므로



$8\times\beta=2\pi\times 2$이 성립한다. 그러므로 $\beta=\frac{\pi}{2}$이다.

또한, $\tan\alpha=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{\frac{8\sqrt{3}}{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\alpha=\frac{\pi}{6}$이다.

θ가 0에서 2π까지 변할 때, $\angle \mathrm{BAP}$는 0에서 $\frac{\pi}{2}$까지 변하므로,

비례식에 의하여 $\angle \mathrm{BAP}=\frac{\theta}{4}$이다. 이때 $\gamma=\pi-\alpha-\frac{\theta}{4}=\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}$이다.

이제 선분 BP의 길이를 구하기 위하여 점 B에서 직선 AP에 수선을 내리고 그 수선의 발을 Q라 하자. 직각삼각형 AQB에서 $\sin\frac{\theta}{4}=\frac{\overline{\mathrm{BQ}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{\overline{\mathrm{BQ}}}{8}$이므로 $\overline{\mathrm{BQ}}=8\sin\frac{\theta}{4}$이다. 그리고 직각삼각형 BQP에서 $\sin\gamma=\sin(\pi-\gamma)=\frac{\overline{\mathrm{BQ}}}{\overline{\mathrm{BP}}}$

이므로 $\overline{\mathrm{BP}}=\frac{\overline{\mathrm{BQ}}}{\sin\gamma}=\frac{8\sin\frac{\theta}{4}}{\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}\right)}$ 이다.

(b) 문항 (a)에 의하여 $f(\theta)=\frac{8\sin\frac{\theta}{4}}{\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}\right)}$이다. 이를 θ에 대하여 미분하면 다음을 얻는다.

$$\frac{df}{d\theta}=\frac{2\left(\cos\frac{\theta}{4}\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}\right)+\sin\frac{\theta}{4}\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}\right)}=\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{4}+\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}\right)}=\frac{1}{\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}\right)}$$

이다. $0\le\theta\le 2\pi$이므로 $\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}\le\frac{5\pi}{6}$이다. 이 범위에서 $\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}=\frac{\pi}{2}$ 일 때 즉, $\theta=\frac{4\pi}{3}$일 때 $\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{4}\right)$는 최댓값 1을 갖고, 이때 $\frac{df}{d\theta}$는 최솟값 1을 갖는다.