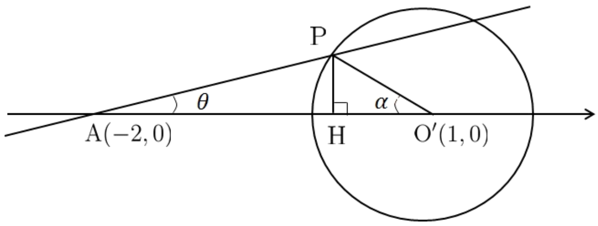
2018학년도 서울시립대학교 자연계열 모의 논술고사 해설

[문제 1] (100점)

좌표평면에서 점 $A(-2,0)$을 지나는 직선이 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 제1사분면의 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 점 중에서 점 A에 가까운 점을 P라 하자. $\angle PAO=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\overline{AP}-2}{\theta^2}$의 값을 구하여라. (단, O는 원점이다.)

[예시답안]

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle PO'H=\alpha$ 라 하자. (단, $O'(1,0)$이다.)



이제 $\overline{AP}=x$라 하자. 그러면 두 직각삼각형 PAH와 PHO′으로부터 $\overline{PH}=x\sin\theta=\sin\alpha$이고 $\overline{AO'}=x\cos\theta+\cos\alpha$인데, $\overline{AO'}=3$이므로

$$1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=(3-x\cos\theta)^2+(x\sin\theta)^2$$

이다. 그리고 이차방정식 $x^2-6\cos\theta x+8=0$을 풀면

$$x=3\cos\theta\pm\sqrt{9\cos^2\theta-8}$$

이다. 그런데 직선은 원과 두 점에서 만나야 하므로 θ의 값은 직선이 원에 접할 때의 각 보다 작아야 한다. 원의 반지름이 1이고 $\overline{AO'}=3$이므로

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}<\cos\theta<1$$

이다. 따라서 $9\cos^2\theta-8>0$이고, $\lim_{\theta\to 0^+}x=2$이므로 $x=3\cos\theta-\sqrt{9\cos^2\theta-8}$이다. 그러므로

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{x-2}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{(3\cos\theta-2)-\sqrt{9\cos^2\theta-8}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{12(1-\cos\theta)}{\theta^2\left((3\cos\theta-2)+\sqrt{9\cos^2\theta-8}\right)}$$

이고, $\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}=\frac{1}{2}$, $\lim_{\theta\to 0^+}\frac{12}{\left((3\cos\theta-2)+\sqrt{9\cos^2\theta-8}\right)}=6$이므로

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{x-2}{\theta^2}=3$$

이다.

[문제 2] (100점)

한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD를 밑면으로 하고 높이가 3인 사각뿔 V－ABCD에서 밑면의 중심을 O라 하고, 삼각형 VAB, VBC의 무게중심을 각각 P, Q라 하자. 꼭짓점 V의 밑면 위로의 정사영이 선분 AC에 있다고 할 때, $\cos(\angle \mathrm{POQ})$의 최솟값을 구하여라.

[예시답안]

$\mathrm{A}(-3,\ -3,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ -3,\ 0)$, $\mathrm{C}(3,\ 3,\ 0)$, $\mathrm{D}(-3,\ 3,\ 0)$이고, 꼭짓점 V의 z좌표가 3이 되도록 좌표축을 정하자. 그러면 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$이고, 두 점 A, C를 지나는 직선의 방정식은 $y=x$, $z=0$이므로 $\mathrm{V}(3x,\ 3x,\ 3)$ $(|x| \le 1)$로 나타낼 수 있다. 한편, $\mathrm{P}(x,\ x-2,\ 1)$, $\mathrm{Q}(x+2,\ x,\ 1)$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2x^2+1$이다. 그리고 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \sqrt{2x^2-4x+5}$, $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \sqrt{2x^2+4x+5}$이므로 내적의 정의에 의해

$$\cos(\angle \mathrm{POQ}) = \frac{2x^2+1}{\sqrt{2x^2-4x+5}\ \sqrt{2x^2+4x+5}}$$

이고, $\cos(\angle \mathrm{POQ}) > 0$ 이다.

이제 $t = 4x^4+4x^2+25$라 하면 $|x| \le 1$이므로 $25 \le t \le 33$이고

$$\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{2x^2-4x+5}\ \sqrt{2x^2+4x+5}}\right)^2 = \frac{4x^4+4x^2+1}{4x^4+4x^2+25} = 1-\frac{24}{t}$$

이다. 따라서 $\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{2x^2-4x+5}\ \sqrt{2x^2+4x+5}}\right)^2$의 최솟값이 $\frac{1}{25}$이므로 $\cos(\angle \mathrm{POQ})$의 최솟값은 $\frac{1}{5}$이다.

[문제 3] (100점)
흰 공과 빨간 공이 각각 1개씩 들어 있는 주머니가 있다. 세 명의 학생 A, B, C가 A, B, C 순서로 주머니에서 1개의 공을 임의로 꺼내고, 공을 꺼낼 때마다 바로 공 1개를 다시 채워 넣는다. 이때 A, B, C가 채워 넣는 공이 빨간색일 확률은 p이고, 흰색일 확률은 $1-p$이다.

(a) B가 공을 채워 넣은 후 주머니에 흰 공과 빨간 공이 각각 1개일 확률을 구하여라. (50점)
(b) C가 꺼낸 공이 빨간 공일 확률을 구하여라. (50점)

[예시답안]

(a) A가 공을 채워 넣은 후 주머니에 빨간 공이 2개일 확률은, 흰 공을 꺼내고 빨간 공을 넣어야 하므로 $\frac{p}{2}$이고, 흰 공과 빨간 공이 각각 1개일 확률은, 빨간 공을 꺼내고 빨간 공을 넣거나 흰 공을 꺼내고 흰 공을 넣어야 하므로 $\frac{p}{2}+\frac{1-p}{2}=\frac{1}{2}$이며, 흰 공이 2개일 확률은 빨간 공을 꺼내고 흰 공을 넣어야 하므로 $\frac{1-p}{2}$이다.
B가 공을 채워 넣은 후 주머니에 흰 공과 빨간 공이 각각 1개인 경우는, A가 공을 채워 넣은 후 주머니에 있는 흰 공의 개수 n에 따라 다음의 3가지 경우가 있다.
(i) $n=0$인 경우: 흰 공을 넣어야 하므로 확률은 $\frac{p}{2}\cdot(1-p)$이다.
(ii) $n=1$일 경우: 빨간 공을 꺼내고 빨간 공을 넣거나, 흰 공을 꺼내고 흰 공을 넣어야 하므로 확률은
$\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot p+\frac{1}{2}\cdot(1-p)\right\}=\frac{1}{4}$이다.
(iii) $n=2$일 경우: 빨간 공을 넣어야 하므로 확률은 $\frac{1-p}{2}\cdot p$이다.
따라서 구하는 값은 $\frac{1}{4}+p(1-p)$이다.

(b) 같은 방법으로 B가 공을 채워 넣은 후 주머니에 빨간 공이 2개일 확률은 $\frac{p}{2}\cdot p+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot p=\frac{p}{4}+\frac{p^2}{2}$이다.
따라서 구하는 값은 $\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{1}{4}+p(1-p)\right\}+\frac{p}{4}+\frac{p^2}{2}=\frac{1}{8}+\frac{3p}{4}$이다.

[문제 4] (100점)

자연수 n과 세 함수

$$f(x) = x\,2^x, \qquad g(x) = x - [x], \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{n} & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

에 대하여, 합성함수 $y = g \circ f(x)$의 그래프와 함수 $y = h(x)$의 그래프와의 교점의 개수를 a_n이라 하자. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

(a) 필요하면 $\lim_{x \to -\infty} x\,2^x = 0$을 이용해서, 함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형을 그려라. (40점)

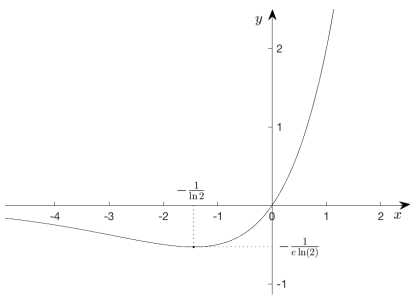
(b) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{a_{k+1}^2}{a_k a_{k+2}}$을 구하여라. (60점)

[예시답안]

(a) $f'(x) = 2^x(1 + x\ln 2)$이고 $f''(x) = 2^x(2 + x\ln 2)\ln 2$이다. 따라서 $x = -\dfrac{1}{\ln 2}$일 때 $f'(x) = 0$이고 $f\left(-\dfrac{1}{\ln 2}\right) = -\dfrac{1}{\ln 2}\,2^{-\frac{1}{\ln 2}} = -\dfrac{1}{2^{\log_2 e}\ln 2} = -\dfrac{1}{e\ln 2}$ 이므로, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{2}{\ln 2}$	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\ln 2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	-	-	-	0	+	1	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	↘	$-\dfrac{2}{e^2\ln 2}$	↘	$-\dfrac{1}{e\ln 2}$	↗	0	↗

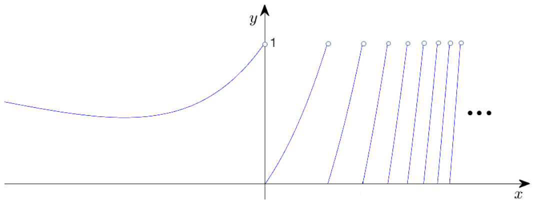
그런데 $2 < e < 4$이므로 $1 < \log_2 e = \dfrac{1}{\ln 2} < 2$이고 $0 < \dfrac{1}{e\ln 2} < 1$이다. 또한 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$이고 $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$이므로, 함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



(b) 고정된 정수 k에 대해서 어떤 구간에 포함되는 모든 x가 $k \leq f(x) < k+1$을 만족시키면

$$g \circ f(x) = f(x) - [f(x)] = f(x) - k$$

이므로, 주어진 그 구간에서 $y = g \circ f(x)$의 그래프는 $y = f(x)$의 그래프를 y축으로 $-k$만큼 평행이동한 그래프와 같다. 따라서 함수 $y = g \circ f(x)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



(i) $x<0$일 때, $g \circ f(x)=f(x)+1$이므로 $x<0$에서 $y=g \circ f(x)$의 그래프와 $y=-x$의 그래프와의 교점의 개수는 1이다.

(ii) $x \geq 0$일 때, $f(0)=0$, $f(n)=n\,2^n$, $f'(0)=1$이므로 $x \geq 0$에서 $y=g \circ f(x)$의 그래프와 $y=\frac{x}{n}$의 그래프와의 교점의 개수는 $f(n)-1=n\,2^n-1$ 이다.

따라서 $a_n=n\,2^n$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}^2}{a_k a_{k+2}}=\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)=n+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{3}{4}+n-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$$

이다.