# ◆ 출제방향(취지) 및 교과서 관련여부 및 근거(출제문제 해설 포함) ◆

## [자연 문제1번]

[출제의도]

본 문제는 유리함수와 초월함수의 적분법, 도함수, 수열 등의 수학적 기본 개념을 이해하고, 이를 넓이, 최적화, 수열의 합에 응용할 수 있는 문제해결능력을 평가하는 데 그 목적이 있다.

<table>
<tr><th colspan="2">문항 번호</th><th>세부 평가항목</th></tr>
<tr><td rowspan="2">문제 1</td><td>(1)</td><td>- $f(t)=t^2-1$, $g(t)=\ln t$, $h(t)=\dfrac{\ln t}{t^2}$를 바르게 계산<br>- $\dfrac{d}{dt}h(t)=\dfrac{1}{t^3}(1-2\ln t)$를 바르게 계산<br>- $t=\sqrt{e}$에서 최댓값임을 바르게 판정함</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>- 제일 아랫면이 변이 $n$개인 삼각형임을 알고, 공의 개수 $\dfrac{n(n+1)}{2}$을 정확히 계산<br>- 구하고자 하는 값이 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k}{2}$임을 바르게 유도<br>- 전체의 합 $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$을 바르게 계산</td></tr>
</table>

**[예시 답안]**

(1) $t>1$에서 두 함수 $f(t)$와 $g(t)$를 정의하면 다음과 같다.

$$f(t)=\int_1^t 2x\,dx=t^2-1$$

$$g(t)=\int_1^t \frac{1}{x}\,dx=\ln t$$

따라서,

$$h(t)=\frac{\ln t}{t^2}$$

이다. 함수 $h(t)$의 도함수는

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}h(t)&=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t^2}+\ln t\cdot(-2)\cdot\frac{1}{t^3}\\&=\frac{1}{t^3}(1-2\ln t)\end{aligned}$$

이다. $\dfrac{d}{dt}h(t)=0$인 $t$는 유일하게 $\ln t=\dfrac{1}{2}$일 때 존재한다.

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}h(t)&=(-3)\cdot\frac{1}{t^4}\cdot(1-2\ln t)-2\cdot\frac{1}{t^4}\\&=-\frac{1}{t^4}\cdot(5-6\ln t)\end{aligned}$$

이므로 $\dfrac{d^2}{dt^2}h(t)$는 $\ln t=\dfrac{1}{2}$일 때 음수이다.

따라서 $t=\sqrt{e}$일 때 $h(t)$가 최대가 되며 최댓값은 $\dfrac{1}{2e}$이다.

(2) 이 사면체의 제일 밑면은 한 변이 $n$개인 삼각형이다. 이 삼각형을 이루는 공의 개수는 을 만드는 공의 개수는

$1+2+...+n=\sum_{i=i}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$이다.

이때, $n$개의 층으로 이루어진 정사면체를 이루는 공의 개수를 $a_n$이라고 하면, $a_n$은 위에서부터 1단, 2단,...$n$단을 이루는 공의 개수의 합으로 표현할 수 있다. 이때, $k$번째 단의 공의 개수는 한변이 $k$개인 정사면체의 제일 밑면의 공의 개수와 같다.
따라서 $a_n$은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$a_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

# [자연 문제2번]

[출제의도]

본 문제는 빗방울의 형성과 낙하 현상으로부터 발생하는 자연 현상을 화학평형의 관점에서 추론하고, 이를 물체의 운동을 기술하는 뉴턴 법칙, 역학적 에너지 보존 등을 적용하여 과학적으로 해석할 수 있는 능력을 평가하고자 함에 그 목적을 둔다.

| 문항 번호 | | 세부 평가항목 |
|---|---|---|
| 문제 2 | (1) | - 초기 상태 CO2(aq)로부터 생성된 H+(aq)의 농도만큼 농도 변화가 발생하고, 이를 통해 새로운 평형에 도달함을 농도표의 형태로 바르게 표현<br>- $K_H P_{CO_2} - x \simeq K_H P_{CO_2}$임을 명시<br>- 수소이온 농도 [H+] = $2\times10^{-5}$ M을 정확히 계산 |
| | (2) | - 빗방울에 작용하는 알짜 힘 $F = -mg + 0.2D^2v^2$을 바르게 표현<br>- $-mg + 0.2D^2 v_f^2 = 0$로부터 $v_f = \sqrt{\frac{mg}{0.2D^2}} = \sqrt{\frac{(\rho\pi D^3/6)g}{0.2D^2}}$를 바르게 계산<br>- $v_f = 5\ \mathrm{m/s}$ 단위를 포함하여 정확한 결과 계산 |
| | (3) | - 역학적 에너지는 $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$<br>- 생성 초기 $E_i = mgh$, 지면에서 $E_f = \frac{1}{2}mv_f^2$.<br>- $\frac{E_f}{E_i} = \frac{mv_f^2/2}{mgh} = \frac{v_f^2}{2gh} = \frac{5^2}{2\times10\times500} = 0.0025$, 즉, 0.25%<br>정확한 계산 결과 |

**[예시 답안]**

(1) 부분 압력 $P_{CO_2}$ = 0.025 atm 일 때, 물 속에 존재하는 CO2의 농도는 제시문 (가)의 헨리에 법칙에 의해 [CO2] = $K_H P_{CO_2}$ 이다.

물 속에 존재하는 CO2에 의해 H2CO3가 형성되며 이로부터 발생하는 수소이온의 농도 [H+]를 $x$ 라고 하면 다음과 같은 과정을 통해 계산할 수 있다.

| 평형 반응식 | $CO_2(aq)\ +\ H_2O(l) \rightleftharpoons$ | $H^+(aq)$ | $+\ HCO_3^-(aq)$ |
|---|---|---|---|
| 초기 상태 농도 | $K_H P_{CO_2}$ | $0$ | $0$ |
| 반응 후의 변화량 | $-x$ | $+x$ | $+x$ |
| 평형 상태 농도 | $K_H P_{CO_2} - x$ | $x$ | $x$ |

따라서 CO2에 의한 빗물 속 H+의 해리 반응의 평형 상수는 $x$로 표현할 수 있다.

$$K_{tot} = \frac{[H^+][HCO_3^-]}{[CO_2]} = \frac{x^2}{K_H P_{CO_2} - x} = 4\times10^{-7}$$

$K_{tot}$이 매우 작으므로 변화량 $x$는 $K_H P_{CO_2}$보다 매우 작으므로 $K_H P_{CO_2} - x \simeq K_H P_{CO_2}$이다.
따라서,

$$x = \sqrt{(4\times10^{-7})\times(0.025\times0.04)} = \sqrt{4\times10^{-10}} = 2\times10^{-5}$$

빗물 속 수소 이온의 농도 [H+] 는 $2\times10^{-5}$ M 이다.

(2) 빗방울에 작용하는 알짜 힘은 $F = -mg + 0.2D^2v^2$.
아랫방향으로 작용하는 중력은 빗방울을 가속시키고 공기의 저항력은 윗방향으로 작용한다.
속력이 증가함에 따라 저항력도 증가하고 알짜 힘은 줄어든다. 저항력의 크기가 중력의 크기에 수렴하면 알짜 힘이 영에 수렴하고 빗방울은 일정한 속력을 가질 것이다.

$-mg + 0.2D^2v_f^2 \cong 0$

=> $v_f = \sqrt{\dfrac{mg}{0.2D^2}} = \sqrt{\dfrac{(\rho\pi D^3/6)g}{0.2D^2}} = \sqrt{\dfrac{\rho\pi Dg}{1.2}} = \sqrt{\dfrac{10^3\times3\times10^{-3}\times10}{1.2}} = 5\ \mathrm{m/s}$

(3) 역학적 에너지는 $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$이므로,

생성 초기의 역학적 에너지 $E_i = mgh$, 지면에서의 역학적 에너지 $E_f = \frac{1}{2}mv_f^2$ 이다.

그러므로 $\dfrac{E_f}{E_i} = \dfrac{mv_f^2/2}{mgh} = \dfrac{v_f^2}{2gh} = \dfrac{5^2}{2\times10\times500} = 0.0025$, 즉, 0.25%이다.