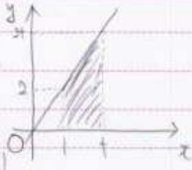
<자연 1-1>

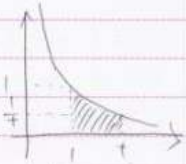
【문제 1】 답안은 반드시 해당 답란에 작성해야 함(다른 문제의 답안을 작성할 경우 '0'점 처리)

(1) $f(t)$의 값은 오른쪽 그림과 같이 $\int_1^{t} 2x\,dx = [x^2]_1^t = t^2-1$ 이므로 $f(t)=t^2-1$ 이다.

(다른 방법) 오른쪽 그림과 같이 사다리꼴 넓이를 구하면 되므로 $\frac{1}{2}\times(2+2t)\times(t-1)$ $=(t+1)(t-1)=t^2-1$ 이다.



$g(t)$의 값을 구하면, 오른쪽 그림과 같이 색칠한 부분의 넓이인 $\int_1^t \frac{1}{x}dx$ $=[\ln|x|]_1^t=\ln|t|-\ln 1=\ln|t|$



이때 $t>1$ 이므로 $g(t)=\ln t$ 이다.

따라서 $h(t)$를 구하면 $h(t)=\frac{g(t)}{f(t)+1}=\frac{\ln t}{(t^2-1)+1}$

$h(t)=\frac{\ln t}{t^2}$ $(t>1)$ 이다.

$h(t)$는 $(1,\infty)$에서 미분 가능하므로

$h'(t)=\frac{(\ln t)'t^2-\ln t(t^2)'}{(t^2)^2}=\frac{\frac{1}{t}\cdot t^2-2t\ln t}{t^4}=\frac{t-2t\ln t}{t^4}=\frac{1-2\ln t}{t^3}$

$h'(t)=\frac{1-2\ln t}{t^3}$ 이고, 이때, 방정식 $h'(t)=0$ 의 해를 구하면

$\frac{1-2\ln t}{t^3}=0$, $1-2\ln t=0$, $\ln t=\frac{1}{2}$ $\therefore t=\sqrt{e}$ 이다.

$h(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$ 이므로,

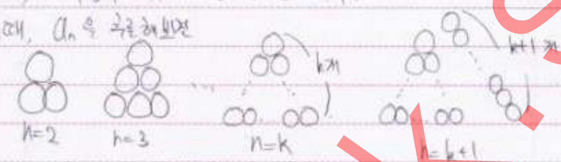
$h(t)$의 증감표를 그리면 다음과 같다.

t	…	$\sqrt{e}$	…
$h'(t)$	+	0	−
$h(t)$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘

즉 $h(t)$는 $t=\sqrt{e}$ 에서 극댓값 $\frac{1}{2e}$을 단 하나 가지므로 $h(t)$의 최댓값은 $\frac{1}{2e}$ 이고 그때의 t값은 $\sqrt{e}$ 이다.

(2) n개의 층으로 이루어진 정사면체에서 맨 아래층의 공의 개수를 a_n, 전체 공의 개수를 b_n이라고 하자.

이때, a_n을 추론해보면



그림과 같이 a_k에 $k+1$을 더하면 a_{k+1}임을 알 수 있다.

$a_k+k+1=a_{k+1}$ 이므로 각각 $k=2$부터 $k=n-1$ 까지 변끼리 더하면,

$\sum_{k=2}^{n-1}(a_k+k+1)=\sum_{k=2}^{n-1}a_{k+1}$

$(a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{n-1})+\sum_{k=2}^{n-1}(k+1)=(a_3+a_4+\cdots+a_n)$ …①

$\sum_{k=2}^{n-1}(k+1)=\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)-2=\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)-2$

$=\frac{n^2-n}{2}+\frac{2n-2}{2}+\frac{-4}{2}=\frac{n^2+n-6}{2}$ 이므로

① 식은

$\frac{n^2+n-6}{2}=(a_3+a_4+\cdots+a_n)-(a_2+a_3+\cdots+a_{n-1})$

$\frac{n^2+n-6}{2}=a_n-a_2$ 이다. 이때, $a_2=3$ 이므로

$a_n=\frac{n^2+n}{2}$ $(n\ge 2)$ 이다.

b_n을 추론해 보면 $n=k$일때 맨 아래층의 수는 a_k이고 $n=k+1$ 일때, 맨아래층의 수는 a_{k+1}이다. 이때 b_{k+1}과 b_k의 차는 a_{k+1} 임을 알 수 있다. 즉, $b_{k+1}-b_k=a_{k+1}$ 임을 알고

b_n을 추론해 보자 각각 $k=2$부터 $k=n-1$ 까지 변끼리 더하면

$(b_3+b_4+\cdots+b_n)-(b_2+b_3+\cdots+b_{n-1})=(a_3+a_4+\cdots+a_n)$

$b_n-b_2=a_3+a_4+\cdots+a_n$

$b_2=4$ 이므로 $b_n=4+a_3+a_4+\cdots+a_n$ 이다. …②

이때, $a_3+a_4+\cdots+a_n=\sum_{k=2}^{n}a_k-a_2$ 이므로

$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2+k}{2}\right)-3=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)-2\right)-3=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)\right)-4$

$\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}-4$

$=\frac{1}{12}\{n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)\}-4$

$=\frac{1}{12}n(n+1)(2n+4)-4=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}-4$

② 식에 대입하면, $b_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 이다.

따라서, 맨 아래층의 공의 개수는 $\frac{n(n+1)}{2}$ 이고, 전체 공의 개수는 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 이다. 이때, $n\ge 2$ 이고, $n=1$ 인 경우는 정사면체가 아니므로 고려하지 않는다.

(1) 이 학생은 문장으로 주어진 $f(t)$와 $g(t)$를 수식으로 정확하게 표현하여 $h(t)$를 올바르게 계산하였다. 이후 도함수 $h'(t)$를 맞게 계산하고, 이 함수의 정보로부터 $h(t)$의 증감 정보를 도출하여 문제가 요구하는 최댓값을 산출하였다.

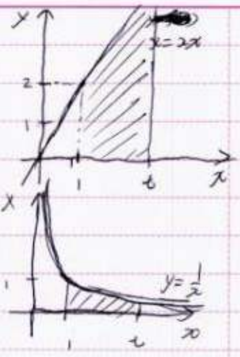
(2) 이 학생은 n층으로 이루어진 정사면체의 맨 아래층 삼각형을 구성하는데 필요한 공의 개수를 나타내는 수열a_n을 귀납적으로 정확하게 정의하였으며, 이를 활용하여 a_n의 일반항을 올바르게 구하였다. 또한 n층으로 이루어진 정사면체를 만드는데 필요한 공의 개수를 나타내는 수열 b_n이 a_n의 합으로 표현된다는 사실을 올바르게 찾아내어 일반항을 계산하였다.

<자연 1-2>

【문제 1】 답안은 반드시 해당 답란에 작성해야 함(다른 문제의 답안을 작성할 경우 '0'점 처리)

(1)

$f(x)=\int_1^t 2x\,dx=[x^2]_1^t=t^2-1$



$g(x)=\int_1^t \frac{1}{x}dx=(\ln|x|]_1^t=\ln t$

$\therefore h(t)=\frac{\ln t}{t^2}$

$h'(t)=\frac{\frac{t^2}{t}-2t\ln t}{t^4}=\frac{1-2\ln t}{t^3}$

$\ln t=\frac{1}{2}$ 일때 $(t=\sqrt{e})$ $h'(t)=0$

$\ln t<\frac{1}{2}$ 일때 $h'(t)>0$ (단 $t>1$)

$\ln t>\frac{1}{2}$ 일때 $h'(t)<0$

따라서 $t=\sqrt{e}$ 일때 $h(t)$는 극댓값을 가진다.

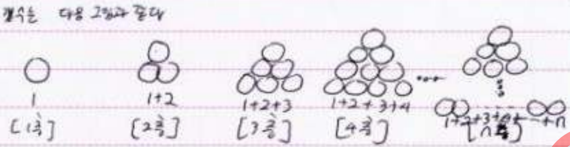
또한 그 값은 $h(t)$의 최댓값이다.

$h(\sqrt{e})=\frac{\ln\sqrt{e}}{e}=\frac{1}{2e}$

$h(t)$의 최댓값 $\frac{1}{2e}$, t값 $\sqrt{e}$

(2) 가장 맨 위쪽 층을 1층이라 하고 가장 아랫층을 n층이라 하면 (n층 정사면체에서)

공의 개수는 다음 그림과 같다



즉 n층 정사면체에서 k층의 공의 개수를 a_k라 하면 $(1\le k\le n)$

$a_k=\sum_{i=1}^{k} i=\frac{k(k+1)}{2}$

따라서 n층 정사면체의 맨 아래층 공의 개수는

$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$

n층 정사면체의 전체 공의 개수는

$\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)$

$=\frac{n(n+1)}{4}\left(\frac{2n+1}{3}+1\right)=\frac{n(n+1)}{4}\times\frac{2n+4}{3}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

맨 아래 층의 공의 개수는 $\frac{n(n+1)}{2}$,

전체 공의 개수는 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

(1) 이 학생은 문장으로 주어진 $f(t)$와 $g(t)$를 수식으로 정확하게 표현하여 $h(t)$를 올바르게 계산하였다. 이후 도함수 $h'(t)$를 맞게 계산하고, 도함수의 정보로부터 $h(t)$의 극댓값을 올바르게 계산하였다. 하지만, 도함수의 부호가 원 함수의 어떤 정보를 제공하는지에 대한 설명이 부족하여, $t=\sqrt{e}$일 때 함수가 극댓값, 최댓값을 갖는 이유에 대한 설명이 부족하다는 점이 아쉬운 답안이었다.

(2) 이 학생은 맨 아래층 삼각형의 각 i번째 줄에 필요한 공의 개수가 i개라는 사실을 활용하여, 그 합인 a_n을 올바르게 구하였다. 또한 전체 정사면체에 필요한 공의 개수가 k번째 층을 이루는 공의 개수를 나타내는 a_k의 합이라는 사실을 정확히 파악하여, 그 합을 올바르게 계산하였다.

<자연2-1>

【문제 2】 답안은 반드시 해당 답란에 작성해야 함(다른 문제의 답안을 작성할 경우 '0'점 처리)

(1) 제시문(가)에 의해 빗방울 속 CO_2의 농도 $[CO_2]$는 $K_H \times P_{CO_2} = 0.04 \times 0.025 = 0.01$ M이다.

이 때, $K_1 = \frac{[H_2CO_3]}{[CO_2]}$ 이므로 $[H_2CO_3] = 2\times10^{-5}$ 이다.

그리고 제시문 (나)의 ③반응에서 $K_2 = \frac{[H^+][HCO_3^-]}{[H_2CO_3]}$ 이고, H^+와 HCO_3^-의 계수비가 1:1이므로 둘의 농도가 동일하여 $[H^+] = [HCO_3^-] = \sqrt{[H_2CO_3] \times K_2}$ 이다.

즉, $[H^+] = \sqrt{2\times10^{-4} \times 2\times10^{-5}} = \sqrt{2^2\times10^{-9}} = 2\times10^{-\frac{9}{2}}$ 이다.

정답: $[H^+] = 2\times10^{-\frac{9}{2}}$ M

(2) 물은 공기에서 저항력을 받으며 그 크기는 $m_{물}\cdot g = kd^2v^2$ 이다.

이 때, 질량 m은 (밀도)×(부피)로 나타낼 수 있다.

또한, 물의 부피를 구해보면 부피 $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\times 3\times(0.05)^3 = 5\times10^{-4}$ cm^3 이다.

또한 물의 밀도는 $1g/cm^3$ 이니 물, 즉 빗방울의 질량은 5×10^{-4} g 이다.

그리고 $mg = kd^2v^2$ 이니, 각각의 수를 대입하면

$5\times10^{-4}g \times 10m/s^2 = 0.2kg/m^3 \times (0.1cm)^2 \times v^2$ 이며 이를 풀면

$\frac{5\times10^{-7}\times10}{2\times10^{-1}\times10^{-6}} = \frac{5\times10}{2} = 25 = v^2$ 이므로 $v = 5m/s$ 이다.

정답: 5m/s

(3) 생성 초기의 역학적 에너지는 500m에 대한 중력 퍼텐셜 에너지 뿐이므로

제시문 (다)에 의해 $U = mgh = 5\times10^{-7}kg \times 500m \times 10m/s^2 = 25\times10^{-4}$ 이다.

그리고 (2)문항에 의해 지면에 도달하기 직전에는 5m/s에 대한 운동에너지만을 가지므로 그 때의 역학적 에너지는 $K = \frac{1}{2}mv^2$

$= \frac{1}{2}\times5\times10^{-7}\times25 = \frac{125}{2}\times10^{-7}$ 이다.

즉, 생성 초기의 에너지의 퍼센트를 구해보면

$\frac{\frac{125}{2}\times10^{-7}}{25\times10^{-4}}\times100 = \frac{125\times10^{-5}}{50\times10^{-4}} = \frac{5}{2}\times\frac{1}{10} = \frac{1}{4}$ 로 0.25% 이다.

정답: 0.25%

2-1: CO2 와 H2CO3로의 전환 및 그를 통한 산성 빗물의 생성과 관련한 연속 화학평형에서의 평형 관계를 명확히 이해하지 못한 듯하다. CO2의 물 속으로의 용해 평형 및 H2CO3로부터의 동일한 양 만큼의 H+ 및 HCO3- 형성 등에 대한 부분적 화학평형은 이해하는 듯 하며, 보다 포괄적인 이해와 학습이 요구된다.

2-2: 문제의 내용을 잘 이해하고 있으며, 문제에서 요구하는 답도 잘 구하였다. 답안 작성 면에서도 서술 식으로 쓰려고 노력하였다. 나쁘지 않다. 그러나 이는 과학논술이므로 모범답안과 같이 수식과 번호, 그리고 적절한 여백을 활용하여 좀 더 일목요연하게 작성했다면 더욱 좋았을 것이다.

2-3: 문제의 내용을 잘 이해하고 올바른 결과도 구하였다. 한 가지 아쉬운 점이 있다면, 논술 답안을 작성할 때에는 모범답안과 같이 기호를 이용하여 수식을 전개하고 마지막 단계에서 숫자를 입력하여 결과를 구하는 습관을 들여야 한다. 이 문제에서 빗방울의 질량은 중간과정에 상쇄되어 결과에 들어오지 않는다.

<자연 2-2>

【문제 2】 답안은 반드시 해당 답란에 작성해야 함(다른 문제의 답안을 작성할 경우 '0'점 처리)

(1) 제시문 (가) 에 의하여

$[CO_2] = K_H P_{CO_2}$ 인데,

$K_H = 0.04\ (atm \cdot L/mol) = 4 \times 10^{-2}\ (atm \cdot L/mol)$ 이고,

$P_{CO_2} = 0.025\ (atm) = 25 \times 10^{-3}\ (atm)$ 이므로

$[CO_2] = 100 \times 10^{-5}\ (L/mol) = 10^{-3}\ (L/mol)$ 이다.

빗물에 CO_2 가 ~~흡수되면~~ 제시문 (나) 의 ①번의 평형을 이루고,

H_2CO_3 가 ②번의 평형을 이루며, 최종적으로 ③의 평형을 이루게 된다.

~~또한 ①번 반응에서 평형상수 k_1은~~

$$\cancel{K_1 = \frac{[H_2CO_3]}{[CO_2]} = 2 \times 10^{-3}}\ \text{~~이므로~~}$$

~~$[CO_2] = 10^{-3}\ (L/mol)$ 에서 $[H_2CO_3] = 2 \times 10^{-6}\ (L/mol)$~~

~~이다. ②번 반응에서 평형상수 k_2는~~

$$\cancel{K_2 = \frac{[H^+][HCO_3^-]}{[H_2CO_3]} = 2 \times 10^{-4}}\ \text{~~이므로~~}$$

~~$[H_2CO_3] = 2 \times 10^{-6}\ (L/mol)$ 에서~~

~~$[H^+][HCO_3^-] = 4 \times 10^{-10}\ (L/mol)$ 이다.~~

평형상수 K_3 에 의해

$$K_3 = \frac{[H^+][HCO_3^-]}{[CO_2]} = 4 \times 10^{-7}$$

에서 $[CO_2] = 10^{-3}\ (L/mol)$ 이므로

$[H^+][HCO_3^-] = 4 \times 10^{-10}$ 이다.

이때, 수소이온은 ②식에 의하여 아레니우스 산이므로

H^+ 와 HCO_3^- 의 이온화도가 같으므로

$[H^+] = [HCO_3^-]$ 이다.

따라서 $[H^+] = 2 \times 10^{-5}\ (L/mol)$ 이다.

(2) 빗방울의 속력이 v 일때 (아래로 떨어지므로) 저항력은

위로 받는다. 이때, 지름의 길이가 $10^{-3}\ (m)$ 이므로

저항력 의 크기는 $|F_r| = 2 \times 10^{-4} \cdot v^2$ 이다.

빗방울이 충분히 높은 위치에서 낙하하면 ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ 그러면 중력과 저항력을 받는다.

중력의 크기를 구하면 물의 ~~[illegible]~~ 밀도가 $1\ g/cm^3$ 이므로

빗방울의 부피는 $\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} \times 10^{-1}\right)^3 \pi = \frac{1}{6}\pi \times 10^{-3}\ (cm^3)$ 이다.

즉 빗방울의 ~~[illegible]~~ 질량은 $5 \times 10^{-4}\ (g)$ 이므로

중력가속도 $g = 10\ m/s^2$ 에서

중력의 크기는 $5 \times 10^{-4} \times 10 = 5 \times 10^{-3}\ (N)$ 이다.

즉 알짜 힘의 크기가 $5 \times 10^{-3} - 2v^2 \times 10^{-4}$ ~~[illegible]~~ 이다.

아래로 알짜힘을 받으면서 속력이 증가하는데, 속력이 증가 하면서 알짜힘의 크기는 감소한다.

~~가속도의 크기는 $10^{-2} - 10v^2 \times 10^{-1}\ (m/s^2)$ 이다. 그런데 시간에 관련된 속력을 나타내고 하면~~

~~$v_t = \int_0^t 10^{-2} - 10v^2 \times 10^{-1}\, dt$~~

알짜힘의 크기가 0 이된 순간에 속력이 더이상 증가하지 않기 시작한다.

그때의 속력을 v_1 라고 하면

알짜 힘의 크기는 $5 \times 10^{-3} - 2v_1^2 \times 10^{-4} = 0$ 이므로

$$\frac{5 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-4}} = v_1^2 = \frac{1}{4} \quad v_1 = \frac{1}{2} = 0.5\ m/s \text{ 이다.}$$

따라서 지면에 도달할때 속력은 $0.5\ m/s$ 이다.

(3) $500\ m$ 의 높이에서 정지해 있으므로 역학적 에너지는

$5 \times 10^{-4} \times 10 \times 500 = 5 \times 10^{-4} \times 5 \times 10^{3} = 25 \times 10^{-1}\ (J)$

이다. 이때 지면에 도달하기 직전에 속력이 $0.5\ m/s$ 이므로

역학적에너지는 $\frac{1}{2} \cdot 5 \times 10^{-4} \cdot (0.5)^2$

$= 5 \times 10^{-4} \times (0.5)^2 = 5 \times 10^{-4} \times 5^2 \times 10^{-3} = 5^4 \times 10^{-7}\ (J)$

이다. 즉 처음 역학적에너지 $5^2 \times 10^{-1}\ (J)$ 에서 지면에 도달하기 직전에 $5^4 \times 10^{-7}\ (J)$ 으로 역학적 에너지가 감소한다. 비율을 구하면

$$\frac{5^4 \times 10^{-7}}{5^2 \times 10^{-1}} = 5^2 \times 10^{-6},$$

$5^2 \times 10^{-6} \times 100 = 5^2 \times 10^{-4}\ (\%)$ 이므로

따라서 $25 \times 10^{-4} = 0.0025\ (\%)$ 이다.

2-1: 문제의 내용을 잘 이해하고 있으며, 문제에서 요구하는 답도 잘 구하였다. 답안 작성 면에서도 서술 식으로 쓰려고 노력하였으며, 추론의 과정이 과학적이며 쉽게 이해가능하게 기술되어 있다. 그러나 과학 논술의 답안에 맞도록 보다 수식과 번호, 그리고 적절한 여백을 활용하여 일목요연하게 작성했다면 더욱 좋았을 것이다.

2-2: 문제의 내용을 잘 이해하고 있으며, 문제에서 요구하는 답도 잘 구하였다. 그러나 이는 과학논술이므로 답안 작성에 있어서 수식과 번호, 그리고 적절한 여백을 활용하여 좀 더 일목요연하게 작성했다면 더욱 좋았을 것이다.

2-3: 문제의 내용을 잘 이해하고 있으나 계산 과정의 오류로 잘못된 답을 얻었다. 논술 답안을 작성할 때에는 모범답안과 같이 기호를 이용하여 수식을 전개하고 마지막 단계에서 숫자를 입력하여 결과를 구하는 습관을 들여야 한다. 이 문제에서 빗방울의 질량은 중간과정에 상쇄되어 결과에 들어오지 않는다.