【문제 1】 답안은 반드시 해당 답란에 작성해야 함(다른 문제의 답안을 작성할 경우 '0'점 처리)

1-A

(1) $f(1)=100$ 이라 했으므로 $a+b+c=100$ … ① 이다.

$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x)\,dx = \left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}(a+c)$ 이므로

$2\sqrt{3}(a+c)=40\sqrt{3}$ $a+c=20$ … ② 이다

①, ② 에 의해서 $a+c=20$, $b=80$ 이다.

a, b, c가 자연수라 했으므로 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의

개수는 a가 1부터 19까지 총 19개 이다.

(2) $f'(x)=2ax+b$ 이므로 $f'(-\frac{1}{2})=-a+b$ 이다

$-a+b<0$ 즉 $b<a$ 를 만족하고 (1)과 마찬가지로

$f(1)=100$, $a+b+c=100$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)를

구하면된다.

a, b, c 가 자연수 이므로 $2\le a+b\le 99$ 이다

a, b가 정해지면 $c=100-(a+b)$ 이므로 c도 정해진다

따라서 $2\le a+b\le 99$, $b<a$ 를 만족시키는 자연수 순서쌍

(a, b)의 개수를 구하면 된다.

$b=1$ 일때 $a=2$ 부터 98 까지 97가지

$b=2$ 일때 $a=3$ 부터 97 까지 95가지

⋮

$b=49$ 일때 $a=50$ 1가지 이므로

구하려는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $\sum_{k=1}^{49}(2k-1)=2401$ 개 이다

1-B

두 점 P, Q 는 평면 α 위에 있지 않고 선분 PQ는 평면

α 와 만나지 않으므로 선분 PQ는 평면 α를 기준으로 나뉘진

두 공간 중 같은 공간에 존재한다.

점 P, Q 에서 평면 α에 내린 수선의 발이 A, B 이므로

선분 PA 와 선분 QB는 평면 α에 각각 수직이다

선분 PC과 선분 BC가 수직(∵ 문제), 선분 PA 와 선분 BC 가

수직이므로 (∵ 선분 PC와 평면 α가 수직) 삼각형 PAC 를

이루고 있는 평면과 선분 BC 는 수직이다 따라서 선분 AC와

선분 BC 도 수직이다 … ①

$\tan\angle PCA=\frac{1}{3}$ 이므로 임의의 양수 x에 의해서

선분 PA 의 길이를 x라 하면 선분 AC의 길이는 $3x$

선분 PC의 길이는 $\sqrt{10}x$ 이다.

마찬가지로 $\tan\angle QCB=\frac{3}{2}$ 이므로 임의의 양수 y에 의해서

선분 BC 의 길이를 $2y$라 하면 선분 BQ의 길이는 $3y$,

선분 QC의 길이는 $\sqrt{13}y$ 이다

①에 의해서 선분 AB의 길이는 $\sqrt{9x^2+4y^2}$ 이다

또, 선분 PA과 선분 QB는 평행 (∵ 두선분 각각 평면 α와

수직) 이므로 선분 PQ의 길이는 $\sqrt{(9x^2+4y^2)+(3y-x)^2}$ 이다

제 2 코사인 법칙에 의해서 $\angle PCQ=\alpha$ 라 하면

$\overline{PQ}^2=\overline{PC}^2+\overline{QC}^2-2\overline{PC}\,\overline{QC}\cdot\cos\alpha$ 이므로 대입하면

$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{130}}$ 이다. 즉 $\sin\alpha=\frac{11}{\sqrt{130}}$ (∵ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$) 이다

즉, 삼각형 PCQ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{PC}\times\overline{QC}\times\sin\alpha=\frac{11}{2}xy$ 이다

또, 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{BC}=3xy$ 이다.

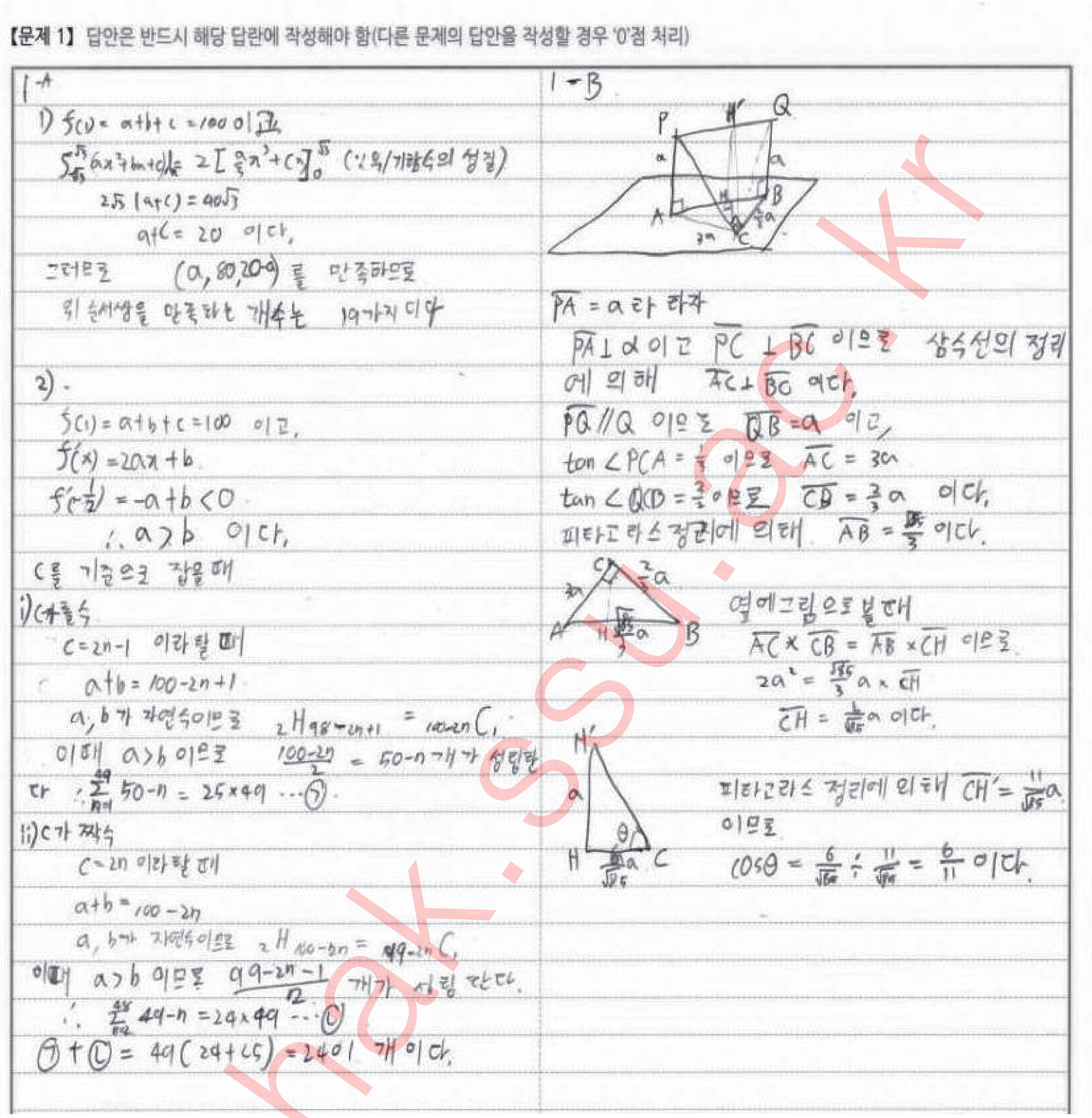
따라서 평면 α와 평면 PCQ가 이루는 각 θ 에서

$\cos\theta=\frac{3xy}{\frac{11}{2}xy}=\frac{6}{11}$ 이다.

[문제 1-A] : 이 응시자는 주어진 조건으로부터 a,b,c의 정보를 알맞게 도출하였고, 이로부터 문제가 요구하는 경우의 수를 적절하여 계산하였다. 특히 문항 (2)번에서 $a>b$라는 조건을 만족하는 경우를 알맞게 나누어 계산하였다. 단지 각각의 경우에 대해 a의 범위 결정에 대한 이유를 추가하였다면 완벽했을 것이라 생각된다.

[문제 1-B] : 이 응시자는 문장으로 제시한 공간에서의 점의 위치와 선분의 관계를 정확이 이해하였고, 이로부터 삼각형의 각 변의 길이를 알맞게 도출하였다. 공간벡터의 개념을 이용하지 않아 제2코사인법칙을 사용하여 삼각형의 넓이를 복잡하게 계산하였다는 점이 약간 아쉽지만, 그 복잡한 계산을 실수 없이 수행하였다.

수학 1-2


【문제 1】 답안은 반드시 해당 답란에 작성해야 함(다른 문제의 답안을 작성할 경우 '0'점 처리)

1-A

1) $f(1) = a+b+c = 100$ 이고,

$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (ax^2+bx+c)dx = 2\left[\frac{a}{3}x^3+cx\right]_0^{\sqrt{5}}$ (기함수/우함수의 성질)

$2\sqrt{5}(a+c) = 40\sqrt{5}$

$a+c = 20$ 이다,

그러므로 $(a, 80, 20-a)$ 를 만족하므로

위 순서쌍을 만족하는 개수는 19가지 이다

2).

$f(1) = a+b+c = 100$ 이고,

$f'(x) = 2ax+b$

$f'(-\frac{1}{2}) = -a+b < 0$

$\therefore a > b$ 이다,

c를 기준으로 잡을 때

i) c가 홀수

$c = 2n-1$ 이라할 때

$a+b = 100-2n+1$

a, b가 자연수이므로 ${}_2H_{98-2n+1} = {}_{100-2n}C_1$

이때 $a>b$ 이므로 $\frac{100-2n}{2} = 50-n$ 개가 성립함

다 $\therefore \sum_{n=1}^{49} 50-n = 25\times49$ …㉠

ii) c가 짝수

$c = 2n$ 이라할 때

$a+b = 100-2n$

a, b가 자연수이므로 ${}_2H_{100-2n} = {}_{99-2n}C_1$

이때 $a>b$ 이므로 $\frac{99-2n-1}{2}$ 개가 성립 한다.

$\therefore \sum_{n=1}^{48} 49-n = 24\times49$ …㉡

㉠+㉡ $= 49(24+25) = 2401$ 개 이다.

1-B

$\overline{PA} = a$ 라 하자

$\overline{PA} \perp \alpha$ 이고 $\overline{PC} \perp \overline{BC}$ 이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ 이다.

$\overline{PQ} \parallel \alpha$ 이므로 $\overline{QB} = a$ 이고,

$\tan\angle PCA = \frac{1}{3}$ 이므로 $\overline{AC} = 3a$

$\tan\angle QCB = \frac{3}{2}$ 이므로 $\overline{CB} = \frac{2}{3}a$ 이다.

피타고라스 정리에 의해 $\overline{AB} = \frac{\sqrt{85}}{3}a$ 이다.

옆에 그림으로 볼때 $\overline{AC}\times\overline{CB} = \overline{AB}\times\overline{CH}$ 이므로

$2a^2 = \frac{\sqrt{85}}{3}a \times \overline{CH}$

$\overline{CH} = \frac{6}{\sqrt{85}}a$ 이다.

피타고라스 정리에 의해 $\overline{CH'} = \frac{11}{\sqrt{85}}a$ 이므로

$\cos\theta = \frac{6}{\sqrt{85}} \div \frac{11}{\sqrt{85}} = \frac{6}{11}$ 이다.

[문제 1-A] : 이 응시자는 주어진 조건으로부터 a,b,c의 정보를 알맞게 도출하였고, 이로부터 문제가 요구하는 경우의 수를 적절하여 계산하였다. 특히 문항 (2)번에서 $a>b$라는 조건을 만족하는 경우를 c가 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 적절하게 일반화하여 계산하였다.

[문제 1-B] : 이 응시자는 삼수선의 정리를 정확히 이해하고 있으며, 문제에 주어진 조건들을 활용하여 문제해결에 필요한 기하적 성질 및 값들을 대체로 잘 유도하였지만, 직선과 선분의 차이를 인지하지 못하여 $\overline{PQ}\perp\alpha$라는 잘못된 조건을 도출하였다. 잘못된 조건을 도출하였지만, 이로부터 전개되는 부분을 알맞게 계산하였다.

수학 1-3

【문제 1】 답안은 반드시 해당 답란에 작성해야 함(다른 문제의 답안을 작성할 경우 '0'점 처리)

1-A (1) $f(1)=100$ 이므로 $a+b+c=100$ 을 만족시켜야 한다

$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x)dx = \left[\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$

$= 2\sqrt{3}a + 2\sqrt{3}c = 40\sqrt{3}$

a와 c는 자연수이므로 $(a+c) \times 2 = 40$

$a+c=20$

a와 c가 정해지면 b는 $a+b+c=100$ 으로 값이 정해진다

∴ (a,b,c) 의 개수는 $a+c=20$ 을 만족시키는 자연수 (a,c)의 개수와 같으므로 ${}_2H_{18}=19$ 개이다

(2) $f(1)=100$ 이므로 $a+b+c=100$ 을 만족시켜야 한다

$f'(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}a \times 2 + b = b-a<0$

$b<a$ 를 만족시켜야 한다

$a+b+c=100$ 을 만족 시키려면

$a+b$ 가 정해지면 c 또한 정해진다

$a+b=k$ 라 하면 $a+b+c=100$ 을 만족 시키는 (a,b,c) 는 $P(k,2)$ 개이다

다만 $b<a$ 이므로 $b\neq a$ 이므로

조건을 만족시키는 순서쌍 (a,b,c)는

$\sum_{k=2}^{99} P(k,2) - 49 = 1+1+2+2+3+3+ \cdots +49+49-49$

$= 2 \times \frac{49 \times 50}{2} - 49$

$= 49^2 = 2401$

∴ 2401개 이다

1-B 평면 α위에 점 A는 P의 수선의 발 이므로 $\overline{PA}$는 평면 α와 수직이다

$\overline{PC}$와 BC는 수직이므로 삼수선 정리에 의하여 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ 이다

$\tan\angle PCA = \frac{1}{3}$ 이므로 $\overline{AC}=3a$, $\overline{PA}=a$

$\tan\angle QCB = \frac{3}{2}$ 이므로 $\overline{CB}=2b$ $\overline{QB}=3b$ 라하자

$\overline{PQ}$는 평면 α와 만나지 않으므로 평면 α와 평행하다 ∴ $\overline{QB}=\overline{PA}$

$3b=a$, $\overline{AC}=9b$, $\overline{PA}=3b$ 이다

점C에서 $\overline{PQ}$에 내린 수선의 발을 H라 하고

H에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H'라고 했을때

$\overline{HH'}=3b$ 이다

피타고라스 정리에 의하여 $\overline{AB}=\sqrt{85}b$ 이고

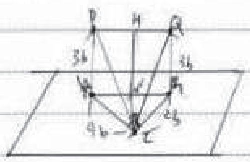
$\overline{CH'} \times \overline{AB} = \overline{AC} \times \overline{CB} = 18b^2$ 이므로

$\overline{CH'} = \frac{18}{\sqrt{85}}b$ 이다

삼수선 정리에 의하여 $\angle HH'C = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$\overline{HC} = \sqrt{(\frac{18}{\sqrt{85}}b)^2 + (3b)^2} = \frac{33}{\sqrt{85}}b$ 이고

$\cos\theta = \frac{\overline{H'C}}{\overline{HC}} = \frac{\frac{18}{\sqrt{85}}b}{\frac{33}{\sqrt{85}}b} = \frac{18}{33} = \frac{6}{11}$ 이다



[문제 1-A] : 이 응시자는 이항정리 및 자연수의 분할의 개념을 잘 이해하고 있으며, 이를 응용하는 방법 또한 잘 파악하고 있다. 하지만 (2)번 문항에 대한 풀이에 두 가지 미흡한 점이 있는데, 마지막 식의 왼쪽 항은 응시자가 앞뒤에서 기술하는 값과는 불일치하는 수식이고, 오른쪽 항의 수식을 얻게 되는 과정은 꼭 필요한 부분임에도 생략되어 있다.

[문제 1-B] : 이 응시자는 삼수선의 정리를 정확히 이해하고 있으며, 문제에 주어진 조건들을 활용하여 문제해결에 필요한 기하적 성질 및 값들을 잘 유도하고 있다. 한 가지 아쉬운 점은 선분 $\overline{PQ}$가 평면 α와 만나지 않는다는 조건으로부터 이들이 평행하다는 결론을 얻었으나, 일반적으로 이는 사실이 아니라는 것이다. 한 직선이 한 평면과 만나지 않으면 그 직선과 평면은 평행하다. 그러나 한 선분이 한 평면과 만나지 않으면 그 선분의 양 끝점이 평면의 같은 편에 있음을 의미할 뿐, 선분과 평면이 평행할 필요는 없다.

수학 1-4

【문제 1】 답안은 반드시 해당 답란에 작성해야 함(다른 문제의 답안을 작성할 경우 '0'점 처리)

주어진 조건에 의해 $a+b+c=100$ ⋯① $(a,b,c>0)$

$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x)dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \cdots = 2a\sqrt{3}+2\sqrt{3}c = 40\sqrt{3}$

$\therefore a+c=20$ ⋯②

따라서 $\begin{cases} a+b+c=100 \cdots ① \\ a+c=20 \cdots ② \end{cases}$ 를 만족하는 해의 개수를 구하는 것과 동일하다

①－②; $b=80$ ②를 만족하는 (a,c)의 개수는 20을 2개의 자연수로 분할하는 개수이므로

$P(20,2)=19$ $\therefore$ (a,b,c)의 개수는 19개

(2) 주어진 조건에 의해 $a+b+c=100$ ⋯① $(a,b,c>0)$

$f'(x)=2ax+b$ $f'(-\frac{1}{2})=-a+b<0$

$\therefore b<a$ ⋯② $(1\le b\le 49)$ a와 b의 값이 정해지면 c의 값은 정해진다.

$b=1$ 일때 가능한 a의 값은 $2\le a\le 98 \Rightarrow 97$개

$b=2$ 일때 가능한 a의 값은 $3\le a\le 97 \Rightarrow 95$개

⋮

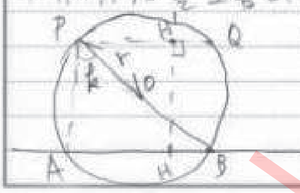
$b=k$ 일때 가능한 a의 값은 $k+1\le a\le 99-k \Rightarrow (99-2k)$개

$\therefore$ 가능한 (a,b,c)의 개수는 $\sum_{k=1}^{49}(99-2k)=99\times 49-2\cdot\frac{49(49+1)}{2}$

$=2401$ (개)

1-B) 점 C의 자취는 점 P와 점 B를 지름의 양끝점으로 하는 구와 평면 α와의 교점의 집합 원이다. 또한 Q의 정사영된 점 B와 P가 지름의 양끝점인 구가 되기 위해서는 선분 $\overline{PQ}$는 평면 α와 평행하다.

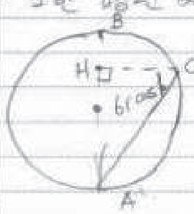
점 P, Q, A, B를 포함하는 평면으로 자른 단면을 관찰하자



이때 점 O를 중심으로 하는 원의 반지름의 길이를 r, α $\angle BPA = k$ 라 하면

$\overline{PA}$의 길이는 $\overline{PA}=2r\cos k$

또한 평면 α와 구의 교점을 관찰하면



$\tan\angle PCA=\frac{1}{3}$ 이므로 점 C는 A와의 거리가 $6r\cos k$를 만족하는 위치에 존재한다

이때 점 B, 점 A가 원의 지름의 양끝점이므로 $\angle BCA=\frac{\pi}{2}$ $\therefore \overline{BA}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$

$4r^2=\overline{BC}^2+36r^2\cos^2 k$ $\overline{BC}^2=4r^2(1-9\cos^2 k)$

$\therefore \overline{BC}=2r\sqrt{1-9\cos^2 k}$

그런데 주어진 조건에 $\tan\angle QCB=\frac{3}{2}$ 이라 제시되어 있으므로 $\tan\angle QCB=\frac{\overline{QB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{BC}}$ $(\because \overline{QB}=\overline{PA})$

$=\frac{2r\cos k}{2r\sqrt{1-9\cos^2 k}}=\frac{\cos k}{\sqrt{1-9\cos^2 k}}=\frac{3}{2}$

제곱해서 정리하면 $\cos k=\frac{3\sqrt{85}}{85}$

$\triangle ABC$에서 점 C에서 선분 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{BC}\times\overline{AC}=\overline{AB}\times\overline{HC}$ 이므로

$\overline{HC}=\frac{36}{85}r$ 이고 점 H에서 선분 $\overline{PQ}$에 내린 수선의 발을 H'이라 하자

그럼 $\overline{HH'}=\overline{PA}=2r\cos k$

$\therefore \tan\theta=\frac{\overline{HH'}}{\overline{HC}}=\frac{2r\cdot\frac{3\sqrt{85}}{85}}{\frac{36}{85}r}=\frac{\sqrt{85}}{6}$

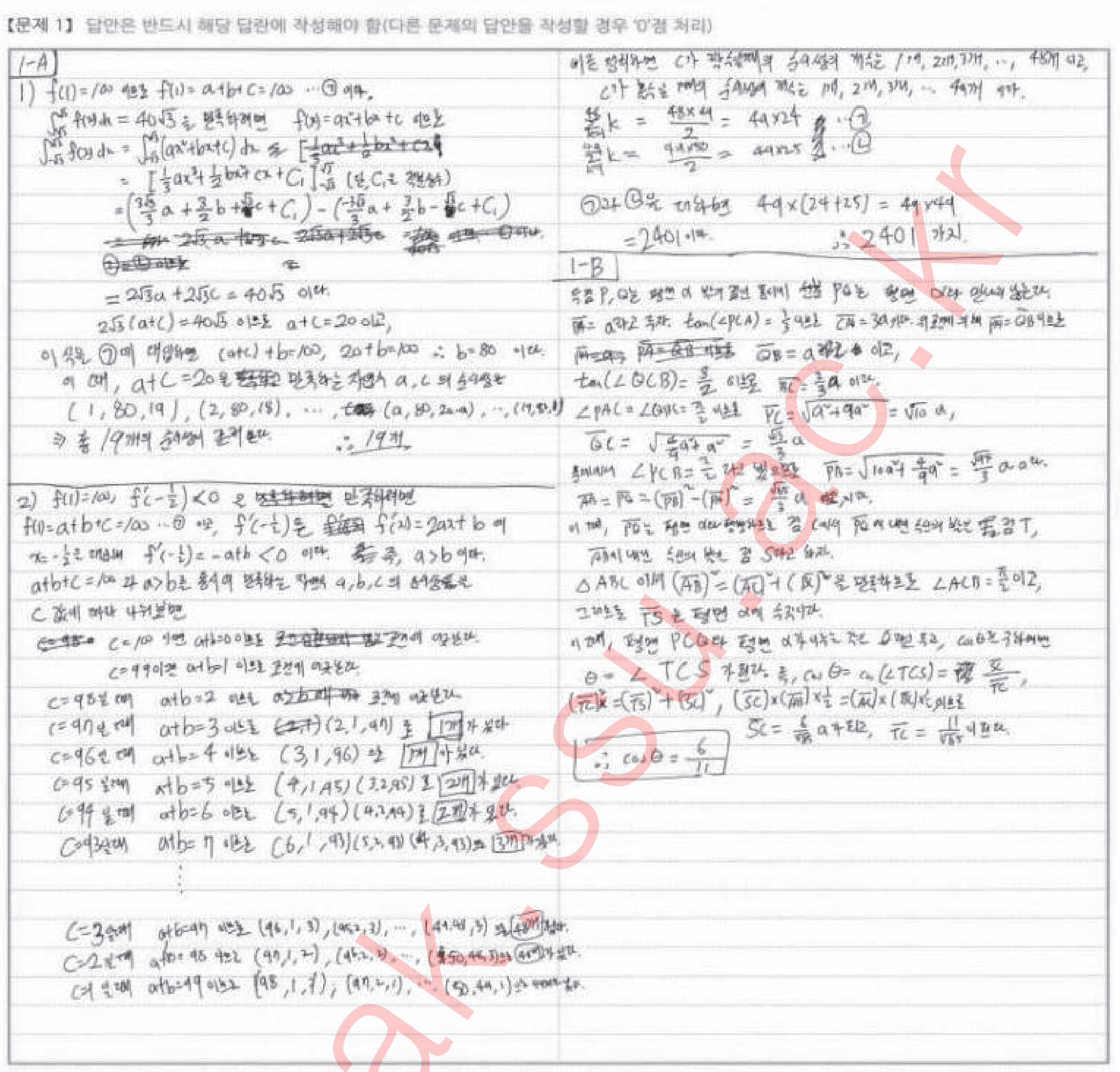
$\tan\theta=\frac{\sqrt{85}}{6}$ $\tan\beta=t$ 일 때 $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$

$\therefore \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{\frac{85}{36}+1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{121}{36}}}=\frac{6}{11}$

[문제 1-A] : 이 응시자는 주어진 조건으로부터 a,b,c의 정보를 알맞게 도출하였고, 이로부터 문제가 요구하는 경우의 수를 적절하여 계산하였다. 특히 문항 (2)번에서 $a>b$라는 조건을 만족하는 경우를 알맞게 나누어 계산하였다. 단지 각각의 경우에 대해 a의 범위 결정에 대한 이유를 추가하였다면 완벽했을 것이라 생각된다.

[문제 1-B] : 이 응시자는 삼수선의 정리를 정확히 이해하고 있으며, 문제에 주어진 조건들을 활용하여 문제해결에 필요한 기하적 성질 및 값들을 대체로 잘 유도하였지만, 직선과 선분의 차이를 인지하지 못하여 $\overline{PQ}\perp\alpha$라는 잘못된 조건을 도출하였다. 잘못된 조건을 도출하였지만, 이로부터 원을 이용하여 원하는 값을 도출하는 과정은 매우 적절하였다.

수학 1-5


【문제 1】 답안은 반드시 해당 답란에 작성해야 함(다른 문제의 답안을 작성할 경우 '0'점 처리)

1-A

1) $f(1)=100$ 이므로 $f(1)=a+b+c=100$ …① 이다.

$= 2\sqrt{3}a + 2\sqrt{3}c = 40\sqrt{3}$ 이다.

$2\sqrt{3}(a+c) = 40\sqrt{3}$ 이므로 $a+c=20$ 이고,

⇒ 총 19개의 순서쌍 존재한다. ∴ 19개

∴ 2401 가지

1-B

[문제 1-A] : 이 응시자는 (1)번 문항에서 주어진 조건을 적절한 연립방정식으로 나타내고 이를 이용해 자연수 a, c의 합이 가지는 조건을 도출하였다. 이로부터 가능한 a, b, c의 순서쌍 19가지를 나열을 통해 정확히 찾아내었다. (2)번 문항에서는 함수 f(x)의 도함수를 구해 주어진 조건을 만족하는 a, b의 조건을 정확히 도출하였다. 나머지 변수 c의 값을 1~100까지 바꿔가며 가능한 (a, b) 순서쌍의 개수를 구하였고, 이것이 등차수열이 됨을 발견하여 전체 가능한 (a, b, c) 조합의 개수를 정확히 계산하였다.

[문제 1-B] : 이 응시자는 선분 PA, QB의 길이를 상수 a로 고정하여 선분 PQ를 평면 alpha와 평행하게 두었다. 이때 점 C에서 선분 BC, PQ에 내린 수선의 발과 점 C가 이루는 각을 이용해 구해 cos theta를 계산하였다. 피타고라스의 정리를 이용해 선분 사이의 직각 관계를 잘 규명하였으나, 왜 선분 사이의 각이 평면 사이의 각과 같은지에 대한 논증은 다소 부족하다.