2015학년도 숭실대학교 수시 신입학

모의 논술고사 문제지

[자연계]

접수번호		출신고교		성 명	

※ 주의사항(문제 1-2번 공통)

① **문제 1**의 풀이는 답안지의 **앞면**에만, **문제 2**의 풀이는 답안지의 **뒷면**에만 쓰시오.

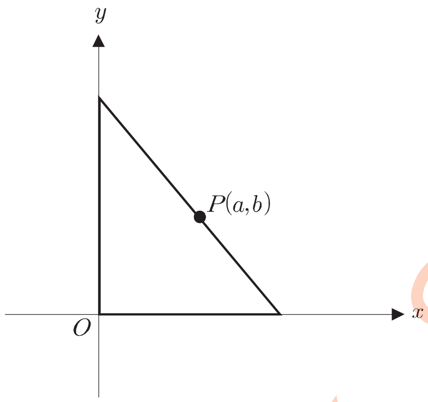
② 답안지에 자신을 드러내는 표현을 쓰지 마시오.

③ **검정색 필기구(연필, 볼펜, 사인펜 등)**만을 사용하여 답안을 작성할 것(그 이외 색 필기구는 부정행위에 해당)

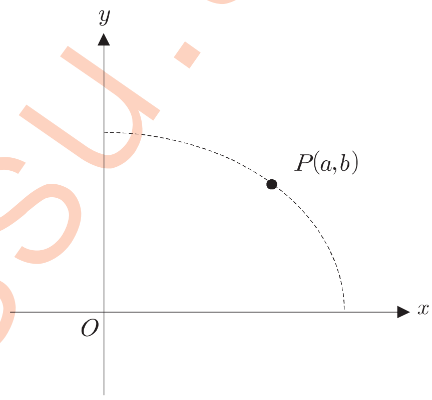
【문제 1】

문제 1-A 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (20점)

좌표평면의 1사분면 위의 점 $P(a,b)$ $(a>0,\ b>0)$가 있다. 빗변이 점 P를 지나고 나머지 두 변이 양의 x축, 양의 y축 위에 놓여 있는 직각삼각형 중 최소 넓이를 갖는 직각삼각형의 넓이를 $F(a,b)$라 할 때, 다음 문항에 답하시오 (<그림 1(a)> 참조).



<그림 1(a)>



<그림 1(b)>

(1) 함수 $F(a,b)$의 식을 구하시오.

(2) 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 위에 있는 점 $P(a,\ b)$ 중에서, $F(a,b)$가 최대가 되는 점 P를 구하시오. (<그림 1(b)> 참조)

<뒷면에 계속>

문제 1-B **다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (30점)**

(가) 좌표공간에서 점 $P(x_1, y_1, z_1)$을 지나고, 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{u}=(a, b, c)$에 평행한 직선 l의 방정식을 구하기 위하여 직선 l 위의 임의의 점을 $X(x, y, z)$라 하면 벡터 $\overrightarrow{PX}$는 $\vec{u}$와 평행하므로 $\overrightarrow{PX}=t\vec{u}$가 되는 t가 존재한다. $\overrightarrow{PX}=X-P$이므로 $X=P+t\vec{u}$가 성립하고, 이 식을 성분으로 나타내면 $x=x_1+at,\ y=y_1+bt,\ z=z_1+ct$가 된다. $abc\neq 0$인 경우, 이 식에서 t를 소거하면 다음의 직선의 방정식을 얻는다.

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

[출처 : 기하와 벡터 「직선과 평면의 방정식」]

(나) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때, 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$의 내적은

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

로 정의한다. 그리고 $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때에는 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$으로 정의한다. 공간벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}=(c_1, c_2, c_3)$에 대하여 다음의 법칙들이 성립한다.

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

② $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

③ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

④ $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (단, k는 실수)

[출처 : 기하와 벡터 「벡터의 성분과 내적」]

좌표공간 위에 주어진 두 직선

$$L_1 : \frac{x-4}{4}=\frac{y+6}{-5}=\frac{z-5}{2} \qquad L_2 : x+1=y+1=-(z-8)$$

에 대하여 다음 문항에 답하시오.

(1) 점 A는 점 $(4, -6, 5)$에서 출발하여, 직선 L_1을 따라 x가 감소하는 방향으로 시간당 $3\sqrt{5}$의 일정한 속력으로 움직인다. 한편, 점 B는 점 $(-1, -1, 8)$에서 출발하여, 직선 L_2를 따라 x가 감소하는 방향으로 시간당 $\sqrt{3}$의 일정한 속력으로 움직인다. 두 점 A, B가 동시에 출발한다고 할 때, 두 점의 거리가 가장 가까워지는 것은 출발 뒤 몇 시간 후인지 구하시오.

(2) 두 직선 L_1, L_2와 각각 수직으로 만나는 직선을 L이라고 하자. 이때, L_1과 L의 교점 P_1, L_2와 L의 교점 P_2를 각각 구하시오.

(3) 문항 (2)에서 구한 P_1, P_2 사이의 거리가 두 직선 L_1, L_2 사이의 최소거리임을 보이시오. 즉, 직선 L_1 위의 임의의 점 Q_1과 직선 L_2 위의 임의의 점 Q_2에 대하여 부등식 $|\overrightarrow{Q_1Q_2}|\geq|\overrightarrow{P_1P_2}|$가 항상 성립함을 보이시오.
[도움말 : $\overrightarrow{Q_1Q_2}=\overrightarrow{Q_1P_1}+\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2Q_2}$]

<다음면에 계속>

【문제 2】

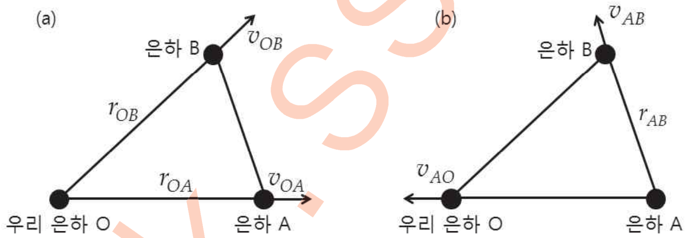
문제 2-A 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (20점)

> 미국의 천체물리학자 허블은 적색 편이를 보이는 수십 개의 은하를 관측하였다. 또한 세페이드 변광성의 주기-밝기 관계를 이용하여 은하까지의 거리를 구하고, 스펙트럼의 적색 편이로부터 은하의 후퇴 속도를 측정하였다. 그 결과 허블은 은하의 후퇴 속도가 은하까지의 거리에 비례하여 증가한다는 것을 알아냈다. 이것을 허블 법칙이라고 한다. 은하까지의 거리를 r, 후퇴 속도를 v로 나타내면, 허블의 법칙은 $v = H \times r$로 나타낼 수 있다. 이때 비례 상수 H를 허블 상수라고 하며, 근사적으로 허블 상수의 역수를 취하여 우주의 나이를 계산할 수 있다.
>
> [출처: 과학 「우주의 기원과 진화」]

다음 문항에 답하시오.

(1) 우리 은하로부터 320만 광년 떨어져 있는 은하가 70 km/s의 속도로 후퇴하고 있다. 이를 통해 우주의 나이(단위: 억년)를 어림하시오. 빛의 속도는 3×10^5 km/s로 한다.

(2) <그림 2(a)>는 우리 은하 O와 이웃하는 두 은하 A, B 간의 상대 속도를 보여준다. 우리 은하 O에서 은하 A까지의 거리는 r_{OA}이고, 우리 은하 O에서 은하 B까지의 거리는 r_{OB}이다. 우리 은하 O에서 관측을 통해 은하 A의 후퇴 속도 v_{OA}와 은하 B의 후퇴 속도 v_{OB}에 대해 허블 법칙 $v_{OA} = H \times r_{OA}$와 $v_{OB} = H \times r_{OB}$가 성립함을 확인하였다. 이러한 상황에서 은하 A를 기준으로 한 은하 B의 후퇴 속도 v_{AB}도 허블 법칙을 만족한다는 사실을 추론하시오 (<그림 2(b)> 참조).



<그림 2>

(a) v_{OA} : 우리 은하 O를 기준으로 한 은하 A의 후퇴 속도

v_{OB} : 우리 은하 O를 기준으로 한 은하 B의 후퇴 속도

r_{OA} : 우리 은하 O에서 은하 A까지의 거리

r_{OB} : 우리 은하 O에서 은하 B까지의 거리

(b) v_{AO} : 은하 A를 기준으로 한 우리 은하 O의 후퇴 속도

v_{AB} : 은하 A를 기준으로 한 은하 B의 후퇴 속도

r_{AB} : 은하 A에서 은하 B까지의 거리.

<뒷면에 계속>

문제 2-B **다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (30점)**

(가) 스웨덴 화학자 아레니우스는 1884년에 용액 속 이온을 연구하여 물에 녹았을 때 수소 이온(H^+)을 내놓는 물질을 산으로, 수산화 이온(OH^-)을 내놓는 물질을 염기로 정의하였다. 수용액에서 산은 H^+과 음이온으로, 염기는 OH^-과 양이온으로 이온화한다. 산과 염기를 반응시키면 H^+과 OH^-이 반응하여 H_2O(물)이 생성되는데, 이를 중화 반응이라고 한다. 즉 중화 반응은 산과 염기가 반응하여 물이 생성되는 반응으로, 염산(HCl)과 수산화나트륨(NaOH)의 중화 반응은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H^+(aq) + Cl^-(aq) + Na^+(aq) + OH^-(aq) \rightarrow H_2O(\ell) + Cl^-(aq) + Na^+(aq)$$

[출처: 화학 I 「닮은꼴 화학 반응」]

(나) 아레니우스의 관점에서 물 분자는 H^+과 OH^-을 모두 내놓을 수 있어 산처럼 작용할 수도 있고, 염기처럼 작용할 수도 있는 양쪽성 물질이다. 순수한 물은 H^+과 OH^-으로 이온화하는데, 이것을 물의 자동 이온화라 하고 반응식으로 나타내면 다음과 같다.

$$H_2O(\ell) \rightleftharpoons H^+(aq) + OH^-(aq)$$
$$K_w = [H^+][OH^-] = 1.0 \times 10^{-14}\,(\mathrm{mol/L})^2 \quad (25\ ℃)$$

여기서 K_w는 물의 이온곱 상수라 하며 일정한 온도의 수용액에서 두 이온 농도의 곱은 일정하다. 물의 이온곱 상수는 매우 작으므로 순수한 물은 상온에서 평형이 왼쪽에 치우쳐 있고 거의 이온화되지 않는다. 염산과 같은 강산이나 수산화나트륨 같은 강염기는 용해된 물질 전부가 이온화되고 물의 자동 이온화로 생성된 H^+은 아주 적으므로 보통의 경우에는 물의 자동 이온화를 고려하지 않아도 되지만, 산 또는 염기의 농도가 아주 묽어지면 물의 자동 이온화를 고려해야 한다.

[출처: 화학 II「화학평형」]

다음 문항에 답하시오.

(1) 제시문 (나)를 고려하여 25℃, 1.0×10^{-7} M 염산에서 H^+의 몰농도 $[H^+]$를 계산하시오.

(2) 0.10 M 염산(HCl) 10.0 mL에 0.20 M 수산화나트륨(NaOH) 수용액을 0에서 10.0 mL까지 첨가할 때, 혼합 용액에 존재하는 총 이온의 몰수를 넣어준 NaOH 수용액의 부피 V(mL)에 대한 함수로 표현하고 그래프를 그리시오. (물의 자동 이온화는 고려하지 않는다.)

(3) 문항 (2)에서 혼합 용액에 존재하는 이온의 농도를 넣어준 NaOH 수용액의 부피 V(mL)에 대한 함수로 표현하고, 이온의 농도가 최소가 되는 V를 구하시오.

<끝>