<자연계열문항>

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	2020학년도 수시모집 논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 1-1(a), 1-1(b), 1-2(a), 1-2(b), 1-3(a), 1-3(b)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학I, 수학II, 미적분I, 미적분II, 기하와 벡터
	핵심개념 및 용어	귀류법, 합성함수, 함수의 최대 최소, 미분, 적분, 벡터의 연산
예상 소요 시간	110분 / 전체 120분	

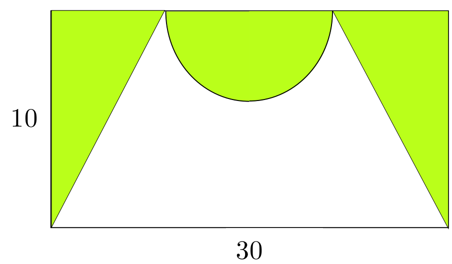
2. 문항 및 제시문

<가>

① 어느 극장의 무대는 관객석에서 보면 폭이 30, 높이가 10인 직사각형 모양이다. <그림 1>과 같이 무대 천장의 한가운데에 반지름의 길이가 r인 반원 모양의 커튼과 이 반원과 연결된 두 삼각형 모양의 커튼을 양쪽에 설치하려고 한다. 이때 커튼에 의해 가려진 부분을 제외하고 무대를 볼 수 있는 영역의 넓이가 최대가 되도록 하는 r의 값을 구해보자. 이 문제는 커튼에 의해 가려진 영역의 넓이를 최소가 되도록 하는 r의 값을 구하는 것과 같다. 따라서 이 영역의 넓이

$$f(r) = \frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{10(30-2r)}{2} \quad (\text{단, } 0 < r < 10)$$

을 최소화하면 된다. $f'(r) = \pi r - 10$이므로 $f(r)$은 $r = \dfrac{10}{\pi}$일 때 최솟값을 갖는다. 한편 $f(r)$에서 무대의 폭 30을 다른 수로 대체하더라도 $f'(r)$의 값이 같으므로 $f(r)$이 최소가 되도록 하는 r의 값은 무대의 폭 30과 무관하다.



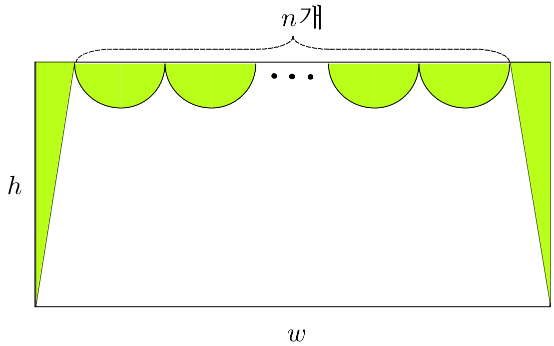
<그림 1>

이제 관객석에서 보면 폭이 w, 높이가 h인 직사각형 모양의 무대를 생각하자. 무대 천장의 한가운데에 <그림 2>와 같이 반지름의 길이가 r인 n개의 반원 모양의 커튼과 이 반원과 연결된 두 삼각형 모양의 커튼을 양쪽에 설치하려고 한다. 이때 커튼에 의해 가려진 부분을 제외하고 무대를 볼 수 있는 영역의 넓이가 최대가 되도록 하는 r의 값을 구해보자. 커튼에 의해 가려진 영역의 넓이

$$f(r) = \frac{n}{2}\pi r^2 + \frac{1}{2}(w - 2nr)h$$

$$(\text{단, } 0 < r < h\text{이고 } 0 < r < \frac{w}{2n})$$

를 최소화하면 된다. 이 함수는 $r = \dfrac{h}{\pi}$가 $0 < r < h$, $0 < r < \dfrac{w}{2n}$를 만족시킬 때, 이 값에서 최솟값을 가짐을 보일 수 있다. 이 r의 값은 무대의 폭 w와 무관하다.



<그림 2>

<나>

함수 g를

$$g(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

으로 정의할 때, 임의의 함수 f와 임의의 실수 a, b에 대하여, $a < b$이면 모든 실수 x에 대하여

$$g(f(x)-a)+a \leq g(f(x)-b)+b \qquad \cdots\cdots②$$

가 성립한다.

이는 다음과 같이 보일 수 있다. 먼저 $f(x) \geq b$이면, $f(x) \geq b > a$이므로

$$g(f(x)-a)+a = f(x)-a+a = f(x)$$

이고

$$g(f(x)-b)+b = f(x)-b+b = f(x)$$

이다. 따라서 ②는 성립한다. 이제 $a \leq f(x) < b$이면

$$g(f(x)-a)+a = f(x)-a+a = f(x)$$

이고

$$g(f(x)-b)+b = b$$

이다. 따라서 ②는 성립한다. 마지막으로 $f(x) < a$이면 $f(x) < a < b$이므로

$$g(f(x)-a)+a = a$$

이고

$$g(f(x)-b)+b = b$$

이다. 따라서 ②는 성립한다.

한편 아래의 명제를 생각하자.

③ 함수 f가 모든 실수 x에 대하여

$$g(f(x)-2)+2 \leq g(f(x)-1)+1$$

을 만족시키는 것은 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 2$이기 위한 필요충분조건이다.

명제 ③은 ②를 이용하여 다음과 같이 보일 수 있다. 함수 f가 모든 실수 x에 대하여

$$g(f(x)-2)+2 \leq g(f(x)-1)+1 \qquad \cdots\cdots④$$

을 만족시킨다고 하자. 결론을 부정하여 어떤 실수 c에 대하여 $f(c) < 2$라고 가정하자. ④에 의하여

$$g(f(c)-2)+2 \leq g(f(c)-1)+1$$

이고 ②에 의하여

$$g(f(c)-1)+1 \leq g(f(c)-2)+2$$

이므로

$$g(f(c)-2)+2 = g(f(c)-1)+1$$

이다. 이것은 모순임을 보일 수 있다. 따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 2$이다. 역으로 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 2$이면 모든 실수 x에 대하여

$$g(f(x)-2)+2 \leq g(f(x)-1)+1$$

이 성립함도 보일 수 있다.

<다>

좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위에 서로 다른 n개의 점 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$이 있다고 하자. 이 n개의 점이 등식

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}+ \cdots +\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}=\vec{0}$$

를 만족시키는 경우에 대하여 알아보자. 먼저 $n=2$인 경우에는 점 A_1을 원점에 대하여 대칭이동한 점이 점 A_2일 때

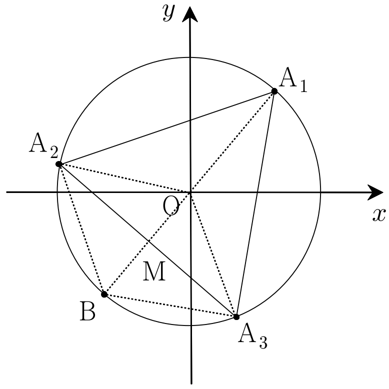
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=\vec{0}$$

가 됨을 쉽게 알 수 있다.

이제 $n=3$인 경우를 생각하자. <그림 3>과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위에 x축의 양의 방향으로부터 시계 반대방향의 순서대로 서로 다른 세 점 A_1, A_2, A_3이 있다. 이 세 점이 등식

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}=\vec{0}$$

를 만족시키면 이 세 점이 정삼각형의 세 꼭짓점이 됨을 다음과 같이 보일 수 있다. <그림 3>과 같이 점 A_1을 원점에 대하여 대칭이동한 점 B를 생각하면 $\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OB}$가 되어야 하므로 사각형 OA_2BA_3은 평행사변형이다. 그런데 두 변 OA_2와 OA_3은 원의 반지름으로 길이가 같으므로 사각형 OA_2BA_3은 마름모이다. 마름모의 두 대각선은 서로 수직이등분하므로 선분 A_2A_3은 선분 OB를 수직이등분한다. 따라서 두 점 A_2와 A_3은 선분 OB의 수직이등분선과 원의 교점이다. <그림 3>에서 선분 A_2A_3의 중점을 점 M이라 하면 삼각형 OMA_2와 삼각형 A_1MA_2가 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여 선분 A_2M의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 선분 A_1A_2의 길이는 $\sqrt{3}$임을 알 수 있다. 또한 삼각형 $A_1A_2A_3$의 다른 두 변의 길이도 $\sqrt{3}$임을 알 수 있다.

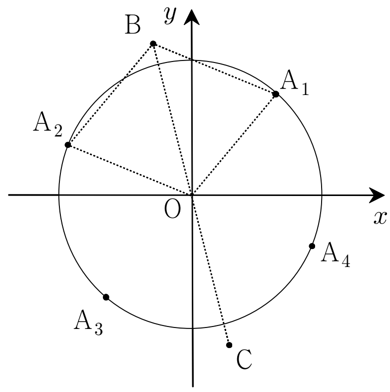


<그림 3>

이제 점의 개수를 하나 더 늘려 $n=4$인 경우를 생각하자. <그림 4>와 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위에 x축의 양의 방향으로부터 시계반대방향의 순서대로 서로 다른 네 점 A_1, A_2, A_3, A_4가 있다. 이 네 점이 등식

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}=\vec{0}$$

를 만족시키는 경우에 대하여 알아보자. 벡터 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$의 끝점을 점 B라 하고 점 B를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 점 C라 하면 $\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}=\overrightarrow{OC}$가 되어야 한다. 위의 $n=3$인 경우와 같은 방법으로 사각형 OA_3CA_4는 마름모가 됨을 보일 수 있다. 그런데 선분 OC의 길이는 선분 OB의 길이와 같고, 이는 2보다 작으므로 선분 OC의 수직이등분선은 원과 서로 다른 두 점에서 만난다. 따라서 두 점 A_3과 A_4는 선분 OC의 수직이등분선과 원의 두 교점이 된다.



<그림 4>

한편 $n=5$인 경우, 예를 들어 세 점 $A_1(1,0)$, $A_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $A_3(0,1)$에 대하여 등식

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5}=\vec{0}$$

를 만족시키는 서로 다른 두 점 A_4, A_5는 원 $x^2+y^2=1$ 위에 존재하지 않는다. 이는

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

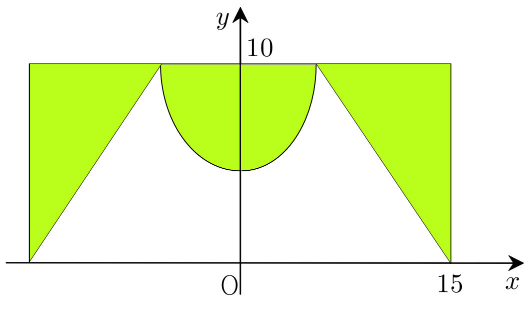
의 크기가 2보다 크다는 사실을 이용하여 보일 수 있다.

1-1. 제시문 **<가>**를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1(a). <그림 1>에서 직사각형의 밑변을 x축으로 하고 밑변의 중점을 원점으로 하는 좌표평면을 생각하자. <그림 5>와 같이 반원 모양의 커튼 대신 포물선 $y=x^2+t$

$$y=x^2+t \ (\text{단, } 0<t<10)$$

모양의 커튼을 생각하자. 이때 커튼에 의해 가려진 부분을 제외한 무대를 볼 수 있는 영역의 넓이가 최대가 되도록 하는 t의 값을 구



<그림 1>

하시오. 또한 이 t의 값이 무대의 폭 30과 관련이 있는지를 판단하시오.

1-1(b). <그림 2>와 같이 자연수 n에 대하여 폭 $w=\dfrac{n^2+11}{\pi}$, 높이 $h=6$인 직사각형 모양의 무대가 있다. 이 무대 천장의 한가운데에 반지름의 길이가 같은 n개의 반원 모양의 커튼과 이 반원과 연결된 두 삼각형 모양의 커튼을 양쪽에 설치하려고 한다. 커튼에 의해 가려진 부분의 넓이를 최소가 되도록 할 때, 무대 양쪽에 두 삼각형 모양의 커튼이 설치되게 하는 가장 작은 자연수 n을 구하시오.

1-2. 제시문 **<나>**를 읽고 함수

$$h(x)=\begin{cases}0 & (x>0)\\ x & (x\le 0)\end{cases}$$

에 대한 다음 문제에 답하시오.

1-2(a). 임의의 함수 f와 임의의 실수 a, b에 대하여, $a<b$이면 모든 실수 x에 대하여

$$h(f(x)-a)+a\le h(f(x)-b)+b$$

가 성립함을 보이시오.

1-2(b). 함수 f가 모든 실수 x에 대하여

$$h(f(x)-7)+7\le h(f(x)-5)+5$$

를 만족시키는 것은 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le 5$이기 위한 필요충분조건임을 보이시오.

1-3. 제시문 **<다>**를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-3(a). 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위에 x축의 양의 방향으로부터 시계 반대방향의 순서대로 서로 다른 네 점 A_1, A_2, A_3, A_4가 있다고 하자. 점 $\mathrm{A}_1(1,0)$이고 이 네 점이 등식

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_4}=\vec{0}$$

를 만족시킬 때, 점 A_3의 좌표를 구하시오.

1-3(b). 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위에 세 점 $\mathrm{A}_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{A}_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{A}_3(a,b)$가 있다고 하자. 등식 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_4}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_5}=\vec{0}$를 만족시키는 서로 다른 두 점 A_4, A_5가 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있을 때, 점 $\mathrm{A}_3(a,b)$가 나타내는 도형의 길이를 구하시오. (단, 다섯 점 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5가 원 위에 놓이는 순서는 고려하지 않는다.)

3. 출제 의도

명제, 함수, 미분, 적분, 평면벡터 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제반 학문에 기본으로 사용되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문항들은 수학I, 수학II, 미적분I, 미적분II, 기하와 벡터 등 고등학교에서 배우는 수학 교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다. 따라서 본 문항들을 통해 학생들이 제시문들을 읽고 함수의 최대 최소, 귀류법을 이용한 명제의 증명, 미분, 적분, 벡터의 연산에 대한 풀이과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 <가>	교육과정	[미적분I] - (다) 다항함수의 미분법 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 ③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분Ⅱ] - (다) 미분법 - $\boxed{2}$ 도함수의 활용 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[미적분I] - (3) 다항함수의 미분법 - (다) 도함수의 활용 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분Ⅱ] - (3) 미분법 - (나) 도함수의 활용 미적2322. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
제시문 <나>	교육과정	[수학 Ⅱ] - (가) 집합과 명제 - $\boxed{2}$ 명제 ③ 필요조건과 충분조건을 이해한다. ⑤ 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다. [수학 Ⅱ] - (나) 함수 - $\boxed{1}$ 함수 ① 함수의 뜻을 알고, 그 그래프를 이해한다. ② 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[수학 Ⅱ] - (1) 집합과 명제 - (나) 명제 수학2121. 명제와 조건의 뜻을 알고, '모든', '어떤'을 포함한 명제를 이해한다. 수학2122. 명제의 역과 대우를 이해한다. 수학2123. 필요조건과 충분조건을 이해한다. 수학2125. 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다. [수학 Ⅱ] - (2) 함수 - (가) 함수 수학2211. 함수의 뜻을 알고, 그 그래프를 이해한다. 수학2212. 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.
제시문 <다>	교육과정	[기하와 벡터] - (나) 평면벡터 - $\boxed{1}$ 벡터의 연산 ② 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[기하와 벡터] - (2) 평면벡터 - (가) 벡터의 연산 기백1211/1212. 벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.
문제 <1-1>	교육과정	[수학I] - (나) 방정식과 부등식 - $\boxed{4}$ 여러 가지 부등식 ② 이차함수와 이차부등식의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다. [수학II] - (나) 함수 - $\boxed{1}$ 함수 함수의 뜻을 알고, 그 그래프를 이해한다. [미적분I] - (다) 다항함수의 미분법 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 ③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분Ⅱ] - (다) 미분법 - $\boxed{2}$ 도함수의 활용 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [미적분Ⅱ] - (라) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[수학I] - (2) 방정식과 부등식 - (라) 여러 가지 부등식 수학1242-1. 이차함수와 이차 부등식의 관계를 이해하고, 이차부등식을 풀 수 있다. [수학II] - (2) 함수 - (가) 함수 수학2211. 함수의 뜻을 알고, 그 그래프를 이해한다 [미적분I] - (3) 다항함수의 미분법 - (다) 도함수의 활용 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분Ⅱ] - (3) 미분법 - (나) 도함수의 활용 미적2322. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [미적분Ⅱ] - (4) 적분법 - (나) 정적분의 활용 미적2421. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문제 <1-2>	교육과정	[수학 Ⅱ] - (가) 집합과 명제 - $\boxed{2}$ 명제 ③ 필요조건과 충분조건을 이해한다. ⑤ 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다. [수학 Ⅱ] - (나) 함수 - $\boxed{1}$ 함수 ① 함수의 뜻을 알고, 그 그래프를 이해한다. ② 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[수학 Ⅱ] - (1) 집합과 명제 - (나) 명제 수학2121. 명제와 조건의 뜻을 알고, '모든', '어떤'을 포함한 명제를 이해한다. 수학2122. 명제의 역과 대우를 이해한다.

문항 및 제시문		관련 성취기준
		수학2123. 필요조건과 충분조건을 이해한다. 수학2125. 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다. [수학 Ⅱ] - (2) 함수 - (가) 함수 수학2211. 함수의 뜻을 알고, 그 그래프를 이해한다. 수학2212. 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.
문제 <1-3>	교육과정	[기하와 벡터] - (나) 평면벡터 - ① 벡터의 연산 ② 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[기하와 벡터] - (2) 평면벡터 - (가) 벡터의 연산 기벡1211/1212. 벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학I	류희찬 외	천재교과서	2014	112-116
	수학Ⅱ	이준열 외	천재교육	2014	68-69
	미적분I	김원경 외	비상교육	2014	104-110
	미적분II	신항균 외	지학사	2014	130-137 175-180
	기하와 벡터	신항균 외	지학사	2014	62-79
	기하와 벡터	우정호 외	동아출판	2014	64-87

5. 문항 해설

제시문 <가>에서는 극장의 무대에 반원 모양의 커튼과 이 반원과 연결된 두 삼각형 모양의 커튼을 양쪽에 설치할 때, 커튼에 의해 가려진 부분을 제외하고 무대를 볼 수 있는 영역의 넓이가 최대가 되도록 하는 문제를 해결하는 방법을 소개한다. <논제 1-1(a)>에서는 제시문 <가>에서 소개된 풀이 방법에 관한 이해를 바탕으로 반원 모양의 커튼 대신 포물선 모양의 커튼을 설치할 때 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다. <논제 1-1(b)>에서는 제시문 <가>에서 제시된 함수의 정의역을 파악하여 커튼에 의해 가려진 부분의 넓이를 최소가 되도록 할 때, 무대 양쪽에 두 삼각형 모양의 커튼이 설치되게 할 수 있는 경우에 대한 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <나>에서는 어떤 함수 g에 대하여 임의의 함수 f가 g와 관련된 어떤 부등식을 만족시키기 위한 필요충분조건을 증명하는 과정을 소개한다. <논제 1-2(a)>와 <논제 1-2(b)>에서는 함수 g와 유사한 함수 h가 주어졌을 때, 제시문 <나>에서 제시된 함수 g에 관한 부등식들을 증명하는 방법을 이해하고 이를 바탕으로 h에 관한 부등식들을 증명할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <다>에서는 좌표평면 위의 크기가 1인 n개의 벡터들이 그 합이 영벡터라는 조건을 만족시키는 경우 벡터들이 만족시켜야 할 조건에 대하여 설명한다. 크기가 1인 두 벡터의 합의 크기가 2보다 작게 주어진 경우 두 벡터는 유일하게 결정됨을 논리적으로 설명한다. <논제 1-3(a)>에서는 제시문 <다>의 설명을 이해하고 $n=4$인 경우에 적용할 수 있는지를 평가한다. <논제 1-3(b)>에서는 $n=5$인 경우 세 벡터가 주어져 있을 때 나머지 두 벡터가 존재하지 않을 수도 있음을 제시문 <다>를 통하여 이해하고 그 두 벡터가 존재할 조건을 구할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

■ 각 세부 문제별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다.

▶ 논제 <1-1(a)>, <1-1(b)>

1. 제시문 <가>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <가>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. <1-1(a)>에서 커튼에 의해 가려진 부분의 넓이를 구하는 적분을 얻는다.
4. 위에서 구한 적분을 미분하여 <1-1(a)>에서 커튼에 의해 가려진 부분의 넓이가 최소가 되도록 하는 t의 값을 구하고, 이 t의 값이 무대의 폭 30과 관련이 없음을 설명한다.
5. <1-1(b)>에서 무대 양쪽에 두 삼각형 모양의 커튼이 설치되며 커튼에 의해 가려진 부분의 넓이가 최소가 되도록 하기 위한 부등식을 찾는다.
6. 부등식의 풀이로부터 <1-1(b)>의 답을 구한다.

▶ 논제 <1-2(a)>, <1-2(b)>
1. 제시문 <나>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <나>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. 정의된 함수 h를 이해한다.
4. <1-2(a)>에서 임의의 함수 f와 $a<b$를 만족하는 실수 a, b에 대하여, $f(x)$의 값에 대한 범위를 세 가지로 나눠 주어진 부등식이 성립함을 증명한다.
5. <1-2(b)>에서 제시된 명제를 제시문 <나>와 같이 귀류법을 사용하여 증명한다.
6. <1-2(b)>에서 제시된 명제의 역을 증명한다.

▶ 논제 <1-3(a)>, <1-3(b)>
1. 제시문 <다>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <다>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. <1-3(a)>에서 두 점 A_1과 A_2로부터 점 C를 찾고 두 점 A_3과 A_4가 선분 OC의 수직이등분선과 원 $x^2+y^2=1$의 두 교점임을 설명한다.
4. <1-3(a)>에서 점 A_3은 점 A_1을 원점에 대하여 대칭이동한 점임을 증명한다.
5. <1-3(b)>에서 문제의 가정으로부터 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_4}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}_5}$의 합이 만족시켜야 할 조건을 구한다.
6. <1-3(b)>에서 앞에서 구한 조건을 적용하여 점 $\mathrm{A}_3(a,b)$가 나타내는 도형이 반원임을 설명하고 그 길이를 구한다.

■ 각 세부 문제별로 다음의 기준으로 채점한다.
1 등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2 등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 정확하게 충족시키고, 3-6의 요건 중 3가지를 만족하는 경우
4 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키고, 3-6의 요건 중 2가지를 만족하는 경우
5 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키고, 3-6의 요건 중 2가지를 만족하나 논리 전개 및 계산이 다소 미흡한 경우
6 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키고, 3-6의 요건 중 1가지를 만족하는 경우
7 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키지만, 3-6의 요건을 충족시키지 못한 경우
8 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키지 않은 경우
9 등급: 위의 6가지 기준을 대부분 충족시키지 못한 경우

7. 예시 답안

■ 1-1(a)

포물선 $y=x^2+t$는 점 $(-\sqrt{10-t},10)$, $(\sqrt{10-t},10)$을 지나므로 대칭성에 의해 이 영역의 반의 넓이

$$f(t)=\int_0^{\sqrt{10-t}}(10-(x^2+t))\,dx+\frac{10(15-\sqrt{10-t})}{2}=\frac{1}{3}(5\sqrt{10-t}-2t\sqrt{10-t})+75$$

(단, $0<t<10$)을 최소화하면 된다. 한편, $f'(t)=\dfrac{2t-15}{2\sqrt{10-t}}=0$을 만족하는 t는 $\dfrac{15}{2}$이고, 이때 $f(t)$는 최솟값을 가지므로 무대 바닥의 한가운데에서 $\dfrac{15}{2}$만큼 떨어진 곳을 꼭짓점으로 하는 포물선모양의 커튼을 설치하면 된다. 한편, $f(t)$에서 무대의 폭의 반인 15를 다른 수로 대체하더라도 $f'(t)$의 값이 같으므로 $f(t)$가 최소가 되도록 하는 t의 값은 무대의 폭 30과 무관하다.

■ 1-1(b)

무대 양쪽에 두 삼각형 모양의 커튼이 설치되며 커튼에 의해 가려진 부분의 넓이가 최소가 되도록 하려면 $\dfrac{6}{\pi}<\dfrac{n^2+11}{2\pi n}$, 즉 $n^2-12n+11=(n-1)(n-11)>0$을 만족해야 한다. 이를 만족하는 가장 작은 자연수는 12이다.

■ 1-2(a)

먼저 $f(x)>b$이면, $f(x)>b>a$이므로

$$h(f(x)-a)+a=a$$

이고

$$h(f(x)-b)+b=b$$

이다. 따라서 부등식은 성립한다. 이제 $a<f(x)\le b$이면

$$h(f(x)-a)+a=a$$

이고

$$h(f(x)-b)+b=f(x)-b+b=f(x)$$

이다. 따라서 부등식은 성립한다. 마지막으로 $f(x)\le a$이면 $f(x)\le a<b$이므로

$$h(f(x)-a)+a=f(x)-a+a=f(x)$$

이고0

$$h(f(x)-b)+b=f(x)-b+b=f(x)$$

이다. 따라서 부등식은 성립한다.

■ 1-2(b)

함수 f가 모든 실수 x에 대하여 $h(f(x)-7)+7\le h(f(x)-5)+5$를 만족시킨다고 하자.
결론을 부정하여 어떤 실수 c에 대하여 $f(c)>5$이라고 가정하자. 그러면

$$h(f(c)-7)+7\le h(f(c)-5)+5$$

이고 논제 1-2(a)에 의하여

$$h(f(c)-5)+5\le h(f(c)-7)+7$$

이므로

$$h(f(c)-7)+7=h(f(c)-5)+5$$

이다. 그런데 $5<f(c)\le 7$이면

$$h(f(c)-7)+7=f(c)>5=h(f(c)-5)+5$$

이므로 모순이고, $f(c)>7$이면

$$h(f(c)-7)+7=7>5=h(f(c)-5)+5$$

이므로 모순이다. 따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le 5$이다. 역으로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le 5$이면 $f(x)\le 5<7$이므로 모든 실수 x에 대하여

$$h(f(x)-7)+7=f(x)=h(f(x)-5)+5$$

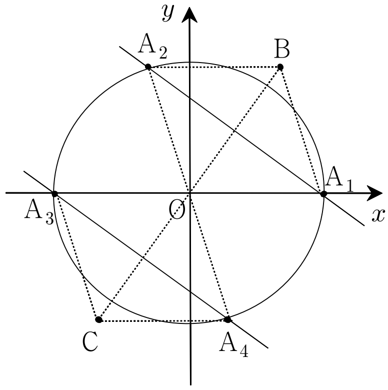
가 성립한다. 따라서 모든 실수 x에 대하여

$$h(f(x)-7)+7\le h(f(x)-5)+5$$

가 성립한다.

■ 1-3(a)

먼저 점 A_2의 y좌표가 0 이하라 하면, 문제의 가정에 의하여 두 점 A_3과 A_4의 y좌표가 모두 음수가 되므로 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}=\vec{0}$를 만족시킬 수 없다. 따라서 점 A_2의 y좌표는 0보다 크다. 벡터 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$의 끝점을 점 B라 하고 점 B를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 점 C라 두자. $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{OB}$이므로 사각형 OA_1BA_2는 평행사변형이다. 그런데 두 변 OA_1와 OA_2는 원의 반지름으로 길이가 같으므로 사각형 OA_1BA_2는 마름모이다. 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로 선분 A_1A_2는 선분 OB의 수직이등분선이다. 따라서 두 점 A_1과 A_2는 선분 OB의 수직이등분선과 원 $x^2+y^2=1$의 두 교점이다. 같은 방법으로 $\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}=\overrightarrow{OC}$이므로 점 A_3과 A_4는 선분 OC의 수직이등분선과 원 $x^2+y^2=1$의 두 교점임을 알 수 있다. 그림에서 $\overline{OA_1}=\overline{OA_3}=1$, $\overline{A_1B}=\overline{A_3C}=1$이고, $\overline{OB}=\overline{OC}$이므로 삼각형 OA_1B와 삼각형 OA_3C는 합동이다. 따라서 $\angle BOA_1=\angle COA_3$이고 두 선분 OB와 OC가 일직선을 이루므로 두 선분 OA_1과 OA_3은 일직선을 이룬다. 따라서 점 A_3는 점 A_1을 원점에 대하여 대칭이동한 점 $A_3(-1,0)$이다.

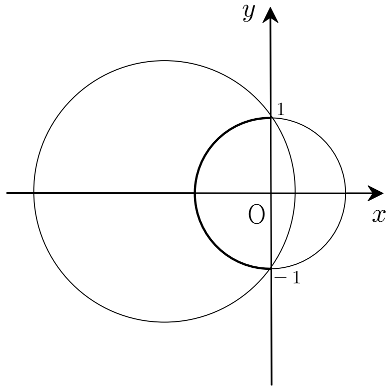


■ 1-3(b)

점 A_4, A_5는 $\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5}=(-\sqrt{3}-a,-b)$를 만족시키는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이다. 점 $B(-\sqrt{3}-a,-b)$에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OA_4}$, $\overrightarrow{OA_5}$의 합이 $\overrightarrow{OB}$가 되어야 하므로 두 점 A_4, A_5가 원 위에 존재하기 위해서는 선분 OB의 수직이등분선과 원이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다. 즉, 선분 OB의 길이가 2 미만이 되어야 한다. (선분 OB의 길이가 2일 때는 선분 OB의 수직이등분선과 원이 접하여 한점에서 만난다.) 그러므로 $A_3(a,b)$는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이면서 원

$$(x+\sqrt{3})^2+y^2=4$$

의 내부의 점이다. 따라서, 점 $A_3(a,b)$가 나타내는 도형은 반원이다. 그러므로 도형의 길이는 π이다.



<다른 풀이>

점 $A_3(\cos\theta,\sin\theta)$라 두면

$$\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5}=(-\sqrt{3}-\cos\theta,-\sin\theta)$$

이다. 점 $B(-\sqrt{3}-\cos\theta,-\sin\theta)$에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OA_4}$, $\overrightarrow{OA_5}$의 합이 $\overrightarrow{OB}$이므로 두 점 A_4, A_5가 원 위에 존재하기 위하여는 선분 OB의 수직이등분선과 원이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다. 즉, 선분 OB의 길이가 2 미만이 되어야 한다. 따라서

$$\sqrt{(\cos\theta+\sqrt{3})^2+\sin^2\theta}<2,$$

즉, $2\sqrt{3}\cos\theta<0$이므로 이를 풀면 $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$이고 점 A_3가 나타내는 도형은 반원이다. 그러므로 도형의 길이는 π이다.