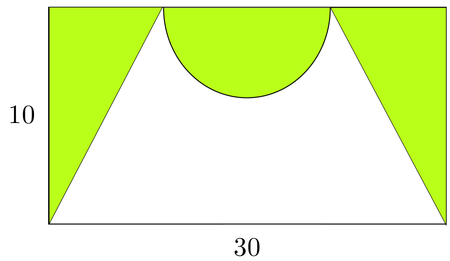
계 열 문 항

<가>

① 어느 극장의 무대는 관객석에서 보면 폭이 30, 높이가 10인 직사각형 모양이다. <그림 1>과 같이 무대 천장의 한가운데에 반지름의 길이가 r인 반원 모양의 커튼과 이 반원과 연결된 두 삼각형 모양의 커튼을 양쪽에 설치하려고 한다. 이때 커튼에 의해 가려진 부분을 제외하고 무대를 볼 수 있는 영역의 넓이가 최대가 되도록 하는 r의 값을 구해보자. 이 문제는 커튼에 의해 가려진 영역의 넓이를 최소가 되도록 하는 r의 값을 구하는 것과 같다. 따라서 이 영역의 넓이

$$f(r) = \frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{10(30-2r)}{2} \quad (\text{단, } 0 < r < 10)$$

을 최소화하면 된다. $f'(r) = \pi r - 10$이므로 $f(r)$은 $r = \dfrac{10}{\pi}$일 때 최솟값을 갖는다. 한편 $f(r)$에서 무대의 폭 30을 다른 수로 대체하더라도 $f'(r)$의 값이 같으므로 $f(r)$이 최소가 되도록 하는 r의 값은 무대의 폭 30과 무관하다.

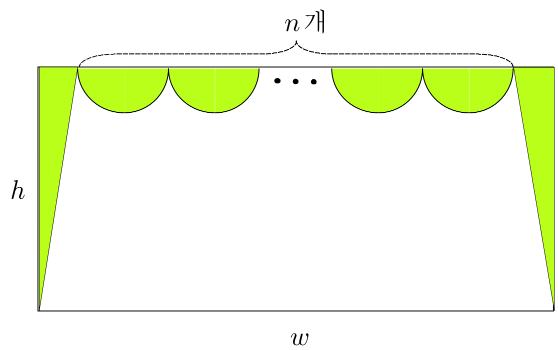


<그림 1>

이제 관객석에서 보면 폭이 w, 높이가 h인 직사각형 모양의 무대를 생각하자. 무대 천장의 한가운데에 <그림 2>와 같이 반지름의 길이가 r인 n개의 반원 모양의 커튼과 이 반원과 연결된 두 삼각형 모양의 커튼을 양쪽에 설치하려고 한다. 이때 커튼에 의해 가려진 부분을 제외하고 무대를 볼 수 있는 영역의 넓이가 최대가 되도록 하는 r의 값을 구해보자. 커튼에 의해 가려진 영역의 넓이

$$f(r) = \frac{n}{2}\pi r^2 + \frac{1}{2}(w - 2nr)h$$

$$(\text{단, } 0 < r < h\text{이고 } 0 < r < \frac{w}{2n})$$



<그림 2>

를 최소화하면 된다. 이 함수는 $r = \dfrac{h}{\pi}$가 $0 < r < h$, $0 < r < \dfrac{w}{2n}$를 만족시킬 때, 이 값에서 최솟값을 가짐을 보일 수 있다. 이 r의 값은 무대의 폭 w와 무관하다.

<나>

함수 g를

$$g(x) = \begin{cases} x & (x \ge 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

으로 정의할 때, 임의의 함수 f와 임의의 실수 a, b에 대하여, $a < b$이면 모든 실수 x에 대하여

$$g(f(x)-a)+a \le g(f(x)-b)+b \qquad \cdots\cdots ②$$

가 성립한다.

이는 다음과 같이 보일 수 있다. 먼저 $f(x) \geq b$이면, $f(x) \geq b > a$이므로

$$g(f(x)-a)+a = f(x)-a+a = f(x)$$

이고

$$g(f(x)-b)+b = f(x)-b+b = f(x)$$

이다. 따라서 ②는 성립한다. 이제 $a \leq f(x) < b$이면

$$g(f(x)-a)+a = f(x)-a+a = f(x)$$

이고

$$g(f(x)-b)+b = b$$

이다. 따라서 ②는 성립한다. 마지막으로 $f(x) < a$이면 $f(x) < a < b$이므로

$$g(f(x)-a)+a = a$$

이고

$$g(f(x)-b)+b = b$$

이다. 따라서 ②는 성립한다.

한편 아래의 명제를 생각하자.

③ 함수 f가 모든 실수 x에 대하여

$$g(f(x)-2)+2 \leq g(f(x)-1)+1$$

을 만족시키는 것은 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 2$이기 위한 필요충분조건이다.

명제 ③은 ②를 이용하여 다음과 같이 보일 수 있다. 함수 f가 모든 실수 x에 대하여

$$g(f(x)-2)+2 \leq g(f(x)-1)+1 \qquad \cdots\cdots ④$$

을 만족시킨다고 하자. 결론을 부정하여 어떤 실수 c에 대하여 $f(c) < 2$라고 가정하자. ④에 의하여

$$g(f(c)-2)+2 \leq g(f(c)-1)+1$$

이고 ②에 의하여

$$g(f(c)-1)+1 \leq g(f(c)-2)+2$$

이므로

$$g(f(c)-2)+2 = g(f(c)-1)+1$$

이다. 이것은 모순임을 보일 수 있다. 따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 2$이다. 역으로 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 2$이면 모든 실수 x에 대하여

$$g(f(x)-2)+2 \leq g(f(x)-1)+1$$

이 성립함도 보일 수 있다.

<다>

좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위에 서로 다른 n개의 점 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$이 있다고 하자. 이 n개의 점이 등식

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}+\cdots+\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}=\vec{0}$$

를 만족시키는 경우에 대하여 알아보자. 먼저 $n=2$인 경우에는 점 A_1을 원점에 대하여 대칭이동한 점이 점 A_2일 때

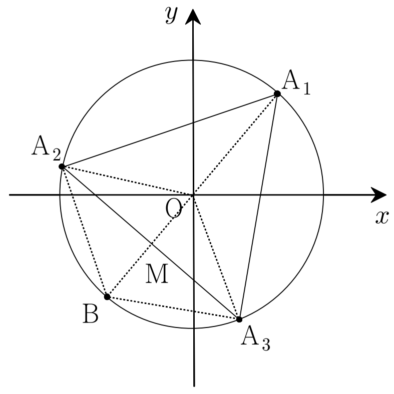
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=\vec{0}$$

가 됨을 쉽게 알 수 있다.

이제 $n=3$인 경우를 생각하자. <그림 3>과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위에 x축의 양의 방향으로부터 시계반대방향의 순서대로 서로 다른 세 점 A_1, A_2, A_3이 있다. 이 세 점이 등식

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}=\vec{0}$$

를 만족시키면 이 세 점이 정삼각형의 세 꼭짓점이 됨을 다음과 같이 보일 수 있다. <그림 3>과 같이 점 A_1을 원점에 대하여 대칭이동한 점 B를 생각하면 $\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OB}$가 되어야 하므로 사각형 OA_2BA_3은 평행사변형이다. 그런데 두 변 OA_2와 OA_3은 원의 반지름으로 길이가 같으므로 사각형 OA_2BA_3은 마름모이다. 마름모의 두 대각선은 서로 수직이등분하므로 선분 A_2A_3은 선분 OB를 수직이등분한다. 따라서 두 점 A_2와 A_3은 선분 OB의 수직이등분선과 원의 교점이다. <그림 3>에서 선분 A_2A_3의 중점을 점 M이라 하면 삼각형 OMA_2와 삼각형 A_1MA_2가 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여 선분 A_2M의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 선분 A_1A_2의 길이는 $\sqrt{3}$임을 알 수 있다. 또한 삼각형 $A_1A_2A_3$의 다른 두 변의 길이도 $\sqrt{3}$임을 알 수 있다.

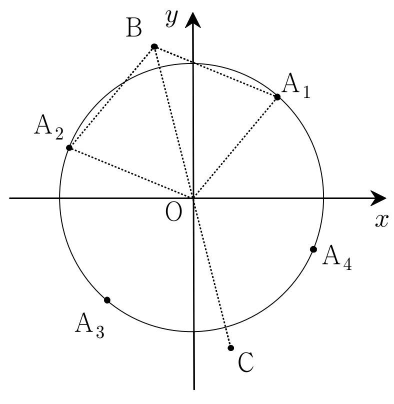


<그림 3>

이제 점의 개수를 하나 더 늘려 $n=4$인 경우를 생각하자. <그림 4>와 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위에 x축의 양의 방향으로부터 시계반대방향의 순서대로 서로 다른 네 점 A_1, A_2, A_3, A_4가 있다. 이 네 점이 등식

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}=\vec{0}$$

를 만족시키는 경우에 대하여 알아보자. 벡터 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$의 끝점을 점 B라 하고 점 B를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 점 C라 하면 $\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}=\overrightarrow{OC}$가 되어야 한다. 위의 $n=3$인 경우와 같은 방법으로 사각형 OA_3CA_4는 마름모가 됨을 보일 수 있다. 그런데 선분 OC의 길이는 선분 OB의 길이와 같고, 이는 2보다 작으므로 선분 OC의 수직이등분선은 원과 서로 다른 두 점에서 만난다. 따라서 두 점 A_3과 A_4는 선분 OC의 수직이등분선과 원의 두 교점이 된다.



<그림 4>

한편 $n=5$인 경우, 예를 들어 세 점 $A_1(1,0)$, $A_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $A_3(0,1)$에 대하여 등식

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5}=\vec{0}$$

를 만족시키는 서로 다른 두 점 A_4, A_5는 원 $x^2+y^2=1$ 위에 존재하지 않는다. 이는

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

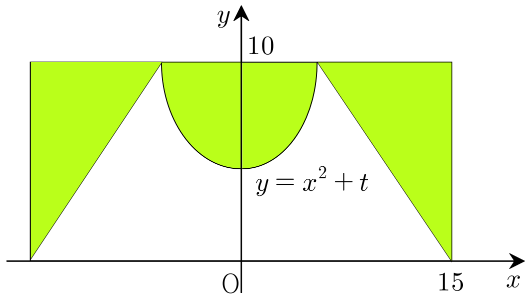
의 크기가 2보다 크다는 사실을 이용하여 보일 수 있다.

1-1. 제시문 **<가>**를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1(a). <그림 1>에서 직사각형의 밑변을 x축으로 하고 밑변의 중점을 원점으로 하는 좌표평면을 생각하자. <그림 5>와 같이 반원 모양의 커튼 대신 포물선

$$y = x^2 + t \quad (\text{단, } 0 < t < 10)$$

모양의 커튼을 생각하자. 이때 커튼에 의해 가려진 부분을 제외한 무대를 볼 수 있는 영역의 넓이가 최대가 되도록 하는 t의 값을 구하시오. 또한 이 t의 값이 무대의 폭 30과 관련이 있는지를 판단하시오.



<그림 5>

1-1(b). <그림 2>와 같이 자연수 n에 대하여 폭 $w = \dfrac{n^2+11}{\pi}$, 높이 $h=6$인 직사각형 모양의 무대가 있다. 이 무대 천장의 한가운데에 반지름의 길이가 같은 n개의 반원 모양의 커튼과 이 반원과 연결된 두 삼각형 모양의 커튼을 양쪽에 설치하려고 한다. 커튼에 의해 가려진 부분의 넓이를 최소가 되도록 할 때, 무대 양쪽에 두 삼각형 모양의 커튼이 설치되게 하는 가장 작은 자연수 n을 구하시오.

1-2. 제시문 **<나>**를 읽고 함수

$$h(x) = \begin{cases} 0 & (x > 0) \\ x & (x \le 0) \end{cases}$$

에 대한 다음 문제에 답하시오.

1-2(a). 임의의 함수 f와 임의의 실수 a, b에 대하여, $a < b$이면 모든 실수 x에 대하여

$$h(f(x)-a)+a \le h(f(x)-b)+b$$

가 성립함을 보이시오.

1-2(b). 함수 f가 모든 실수 x에 대하여

$$h(f(x)-7)+7 \le h(f(x)-5)+5$$

를 만족시키는 것은 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \le 5$이기 위한 필요충분조건임을 보이시오.

1-3. 제시문 **<다>**를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-3(a). 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위에 x축의 양의 방향으로부터 시계반대방향의 순서대로 서로 다른 네 점 A_1, A_2, A_3, A_4가 있다고 하자. 점 $\mathrm{A}_1(1,0)$이고 이 네 점이 등식

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_4}=\vec{0}$$

를 만족시킬 때, 점 A_3의 좌표를 구하시오.

1-3(b). 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위에 세 점 $\mathrm{A}_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{A}_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{A}_3(a,b)$가 있다고 하자. 등식 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_4}+\overrightarrow{\mathrm{OA}_5}=\vec{0}$를 만족시키는 서로 다른 두 점 A_4, A_5가 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있을 때, 점 $\mathrm{A}_3(a,b)$가 나타내는 도형의 길이를 구하시오. (단, 다섯 점 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5가 원 위에 놓이는 순서는 고려하지 않는다.)