

[숙명여자대학교 문항정보]

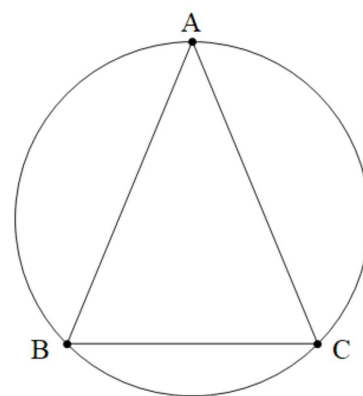
1. 일반 정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	2019학년도 모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호	자연계열 / 1-1(a), 1-1(b), 1-2(a), 1-2(b), 1-3(a), 1-3(b)	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학I, 수학II, 미적분I, 미적분II, 기하와 벡터
	핵심 개념 및 용어	이차곡선, 접선, 수열, 수학적 귀납법, 도함수, 삼각함수
예상 소요 시간	120분	

2. 문항 및 제시문

<가>

원 위의 세 점이 만드는 삼각형 중 넓이가 최대인 것은 어떤 삼각형인지 알아보자. <그림 1>과 같이 반지름이 1인 원 위에 세 점  $A, B, C$ 를 임의로 잡았을 때, 삼각형  $ABC$ 의 넓이가 최대가 되는 조건이 무엇인지 두 단계로 알아보자. 먼저 세 점 중 두 점  $B$ 와  $C$ 를 고정했을 때 삼각형  $ABC$ 의 넓이가 최대가 되는 나머지 한 점  $A$ 는 다음과 같이 구할 수 있다. 삼각형  $ABC$ 의 밑변을 선분  $BC$ 로 하면 높이는 점  $A$ 와 직선  $BC$  사이의 거리이다. 따라서 점  $A$ 가 원 위의 점 중 직선  $BC$ 에서 가장 멀리 떨어진 점일 경우에 삼각형  $ABC$ 의 넓이가 최대가 된다. 이때, 삼각형  $ABC$ 는 선분  $BC$ 를 밑변으로 하는 이등변삼각형이 됨을 확인할 수 있다.



<그림 1>

이제 이등변삼각형 중 넓이가 최대가 되는 경우를 구해보자. 이를 위하여 <그림 2>와 같이 좌표 평면 위에서 점  $B$ 와  $C$ 를 직선  $y = -k$  (단,  $0 \leq k < 1$ ) 위의 점이라 하자. 이 때, 삼각형  $ABC$ 의 넓이를 최대로 만드는 점  $A$ 는 원 위의 점 중 직선  $y = -k$ 에 가장 멀리 떨어진 점  $(0, 1)$ 이 된다. 두 점  $B$ 와  $C$ 는 원  $x^2 + y^2 = 1$  위의 점이므로 좌표는  $(-\sqrt{1-k^2}, -k), (\sqrt{1-k^2}, -k)$ 이다. 따라서 이때의 삼각형  $ABC$ 의 넓이  $S(k)$ 는

$$S(k) = (1+k)\sqrt{1-k^2}$$

이다. 미분법을 이용하여  $S(k)$ 가 최댓값을 갖게 하는  $k$ 의 값을 구하면  $k = \frac{1}{2}$ 이다. 따라서 원 위의 세 점이 만드는 삼각형 중 넓이가 최대인 것은 정삼각형이다.

<나>

자연수로 이루어진 수열의 임의의 두 항이 서로 소인 경우 (즉, 두 항의 최대공약수가 1인 경우), 이 수열을 서로 소 수열이라고 부른다. 예를 들어

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$$

과 같이 수열의  $n$ 번째 항을  $n$ 번째 소수로 두면 임의의 두 소수는 서로 소이므로 이 수열은 서로 소 수열이다. 하지만 홀수들의 수열

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$

을 생각하면 3과 9가 서로 소가 아니므로 이 수열은 서로 소 수열이 아님을 알 수 있다.

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열  $\{a_n\}$ 을 생각하자.

$$a_1 = 3, a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

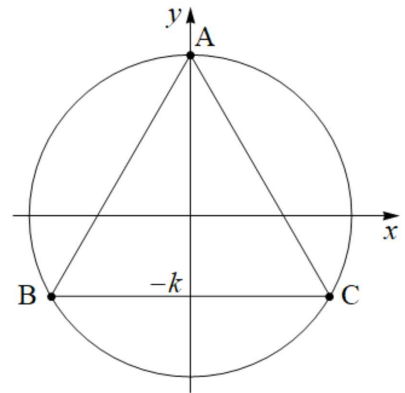
수학적 귀납법을 이용하면 임의의 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n$ 은 홀수임을 보일 수 있다. ①식을 변형하면

$$a_{n+1} - 2 = a_n^2 - 2a_n = a_n(a_n - 2) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

를 얻는다. 따라서 임의의 두 자연수  $n$ 과  $m$  ( $n > m$ )에 대하여 ②식을 반복하여 적용하면

$$a_n - 2 = a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_m(a_m - 2)$$

이다. 이제  $a_n$ 과  $a_m$ 의 공약수를  $k$ 라 하면,  $a_n - a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_m(a_m - 2) = 2$ 에서  $k$ 가 좌변의 약수이므로  $k$ 는 2의 약수이어야 한다. 그러나  $a_n$ 은 항상 홀수이므로  $k \neq 2$ 이고 따라서  $k = 1$ 이다. 즉,  $a_n$ 과  $a_m$ 은 서로 소이다. 그러므로 위와 같이 정의된 수열  $\{a_n\}$ 은 서로 소 수열이다.



<그림 2>

<다>

(I) 곡선  $y = f(x)$ 가  $x = \alpha$ 에서  $x$ 축에 접하면 다음이 성립한다.

$$f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0$$

(II) 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식  $f(x) = 0$ 이 중근  $\alpha$ 를 가진다면  $f(x)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(x) = (x - \alpha)^2(x - \beta)$$

여기서  $\beta$ 는 또 다른 한 근을 나타낸다.

(III) 다음과 같은 정적분이 성립한다.

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2(x - \beta) dx = -\frac{(\beta - \alpha)^4}{12}$$

**1-1.** 다음을 구하시오.

**1-1(a).** 타원  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  위에 두 점  $B(0, -2)$ 와  $C(3, 0)$ 이 있다. 삼각형  $ABC$ 의 넓이가 최대가 되게 하는 타원 위의 점  $A$ 의 좌표를 구하시오.

**1-1(b).** 타원  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  위에 두 점  $B$ 와  $C$ 가  $x$ 축에 평행한 직선  $y = -k$  (단,  $0 \leq k < 2$ ) 위에 놓여 있다. 이 타원 위의 움직이는 점  $A$ 에 대하여 삼각형  $ABC$ 의 넓이가 최대가 되게 하는  $k$ 의 값과 그때의 삼각형  $ABC$ 의 넓이를 구하시오.

**1-2.** 아래와 같이 귀납적으로 정의된 수열  $\{b_n\}$ 에 대하여 다음 문제에 답하시오.

$$b_1 = 2, b_{n+1} = b_n^2 - 3b_n + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

**1-2(a).** 임의의 자연수  $n$ 에 대하여  $b_n$ 이 3의 배수가 아님을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하시오.

**1-2(b).** 수열  $\{b_n\}$ 은 서로 소 수열임을 증명하시오.

**1-3.** 함수  $f(x) = x^3 + 3x^2 \cos \theta - 4 \sin 2\theta$  (단,  $\theta$ 는  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 인 상수)의 그래프가  $x$ 축에 접할 때 다음을 구하시오.

**1-3(a).**  $\sin \theta$ 의 값을 구하시오.

**1-3(b).** 곡선  $y = f(x)$ 와  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

### 3. 제시문 요약

#### <가>

원 위의 세 점이 이루는 삼각형 중 넓이가 최대가 되는 경우는 무엇인지 설명한다. 먼저 두 점을 고정한 후 넓이가 최대가 되는 삼각형은 이등변삼각형이 되고, 이등변삼각형 중 넓이가 최대가 되는 것은 정삼각형이다.

#### <나>

서로 소 수열을 정의하고 귀납적으로 정의된 수열이 서로 소 수열임을 보인다.

#### <다>

곡선  $y=f(x)$ 가  $x=\alpha$ 에서  $x$ 축에 접할 때  $f(\alpha)=0$ ,  $f'(\alpha)=0$ 이다. 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식  $f(x)=0$ 이 중근  $\alpha$ 를 가진다면  $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ 이다. 여기서  $\beta$ 는 또 다른 한 근을 나타낸다. 또한 다음과 같은 정적분이 성립한다.

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2(x-\beta) dx = -\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$$

### 4. 출제 의도

제시문 <가>에서는 원 위의 세 점이 이루는 삼각형 중 넓이가 최대가 되는 경우는 무엇인지를 두 단계에 걸쳐 설명한다. 첫 번째 단계에서는 두 점을 고정한 후 넓이가 최대가 되는 삼각형은 이등변삼각형이 됨을 보이고, 두 번째 단계에서는 이등변삼각형 중 넓이가 최대가 되는 것은 정삼각형임을 확인한다. <문제 1-1(a)>에서는 제시문 <가>의 첫 번째 단계의 논리 전개를 이해하여 같은 방법으로 타원의 경우에 적용할 수 있는지를 평가한다. <문제 1-1(b)>에서는 제시문 <가>의 두 번째 단계를 이해하고 타원의 경우에 넓이가 최대가 되는 삼각형의 형태를 미분법을 적용하여 구할 수 있는지를 묻는다.

제시문 <나>는 서로 소 수열을 정의하고 귀납적으로 정의된 수열이 서로 소 수열임을 보인다. <문제 1-2(a),(b)>에서는 귀납적으로 정의된 수열을 이해하고 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 명제들을 증명할 수 있는지를 보고자 한다.

제시문 <다>는 삼차함수  $f(x)$ 가  $x$ 축과 접할 때 그래프의 개형을 이해하기 위해 고려하여야 할 성질들을 다룬다. 이 때  $x^2$ 의 계수와 상수항이 삼차함수로 주어져 있어서 다항식의 연산 능력을 평가하고, 삼차함수의 기본 성질 및 미분, 적분의 관계를 이해하는지 질문한다. <문제 1-3(a)>에서는 즉,  $x=\alpha$ 에서 접한다면  $x=\alpha$ 에서의 함수값  $f(\alpha)=0$ 이고 미분값  $f'(\alpha)=0$ 이라는 사실을 적용할 수 있는지를 묻고 있다. <문제 1-3(b)>에서는 중근  $x=\alpha$ 를 가지고 삼차방정식  $f(x)=0$ 의 또 다른 한 근  $x=\beta$ 를 구할 수 있는지에 대해 그리고 적분을 사용한 넓이의 수리적 이해를 묻는다.

## 5. 출제 근거

### 가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문 <가>	교육과정	[기하와 벡터] - (가) 평면 곡선 - ㉔ 평면곡선의 접선 ① 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[기하와 벡터] - (1) 평면 곡선 - (가) 이차곡선 기백1121. 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
제시문 <나>	교육과정	[수학Ⅱ] - (ㄷ) 수열 - ㉓ 수학적 귀납법 ① 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
	성취기준· 성취수준	[수학Ⅱ] - (3) 수열 - (다) 수학적 귀납법 수학2331. 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
제시문 <다>	교육과정	[미적분Ⅰ] - (ㄷ) 다항함수의 미분법 - ㉓ 도함수의 활용 ④ 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[미적분Ⅰ] - (3) 다항함수의 미분법 - (다) 도함수의 활용 미적1334. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
문제 <1-1>	교육과정	[기하와 벡터] - (가) 평면 곡선 - ㉔ 평면곡선의 접선 ① 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[기하와 벡터] - (1) 평면 곡선 - (가) 이차곡선 기백1121. 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
문제 <1-2>	교육과정	[수학Ⅱ] - (ㄷ) 수열 - ㉓ 수학적 귀납법 ③ 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[수학Ⅱ] - (3) 수열 - (다) 수학적 귀납법 수학2332/2333. 수학적 귀납법의 원리를 이해하고, 이를 이용하여 자연수에 관한 명제를 증명할 수 있다.
문제 <1-3>	교육과정	[미적분Ⅰ] - (ㄷ) 다항함수의 미분법 - ㉓ 도함수의 활용 ④ 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [미적분Ⅱ] - (라) 적분법 - ㉔ 정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[미적분Ⅰ] - (3) 다항함수의 미분법 - (다) 도함수의 활용 미적1334. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [미적분Ⅱ] - (4) 적분법 - (라) 정적분의 활용 미적1431. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

\*: 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8] “수학과 교육과정”

\*\* : 교육과학기술부 발간 「2009 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」(교육과학기술부 발간등록번호 11-1341000-002322-01)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	류희찬 외	천재교과서	2014	154-163
	수학 II	정상권 외	금성출판사	2016	156-163
	기하와 벡터	류희찬 외	천재교과서	2014	18-21
	기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2016	17-22
	미적분 I	황선욱 외	좋은책신사고	2015	109-176
	미적분 I	김창동 외	교학사	2016	110-187
	미적분 II	황선욱 외	좋은책신사고	2016	113-167
	미적분 II	정상권 외	금성출판사	2016	110-198
기타					

**6. 문항 해설**

수열, 함수, 미분, 적분, 이차곡선 등은 수학을 비롯한 자연과학, 사회과학 등 제반 학문에 기본으로 사용되는 필수 불가결한 도구이다. 본 문항들은 수학I, 수학II, 미적분I, 미적분II, 기하와 벡터 등 고등학교에서 배우는 수학 교과들로부터의 이해를 바탕으로 한다. 따라서 본 문항들을 통해 학생들이 제시문들을 읽고 이차곡선, 접선, 함수의 최대 최소, 수열, 수학적 귀납법, 미분, 적분에 대한 풀이과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

**7. 채점 기준**

■ 각 세부 문제별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다.

▶ 논제 <1-1(a)>, <1-1(b)>

1. 제시문 <가>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <가>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. 점 A가 직선 BC와 평행한 직선이 타원에 접하는 점임을 안다.
4. 타원의 접선의 방정식을 이용하여 점 A의 좌표를 구한다.
5. 삼각형의 넓이  $S(k)$ 를  $k$ 에 대한 식으로 바르게 구한다.
6.  $S(k)$ 를 미분하여 최댓값을 갖게 하는  $k$ 값과 최댓값을 구한다.

▶ 논제 <1-2(a)>, <1-2(b)>

1. 제시문 <나>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <나>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3. 귀납적으로 정의된 수열을 이해한다.
4. <1-2(a)>에서 수학적 귀납법을 이용하여  $b_n$ 이 3의 배수가 아님을 증명한다.
5. <1-2(b)>에서 제시문의 방법을 적용하여  $b_n$ 과  $b_m$ 의 관계식을 구한다.
6. <1-2(b)>에서  $b_n$ 이 서로 소 수열임을 증명한다.

▶ 논제 <1-3(a)>, <1-3(b)>

1. 제시문 <다>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다.
2. 제시문 <다>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다.
3.  $x$ 축과 접하는 점의  $x$ 좌표를 구할 수 있다.
4. 삼차방정식으로부터  $\sin\theta$ 의 값을 구할 수 있다.
5. 삼차방정식의 중근을 제외한 또 다른 한 근을 구할 수 있다.
6. 둘러싸인 부분의 넓이가 정적분으로 주어짐을 안다.

■ 각 세부 문제별로 다음의 기준으로 채점한다.

- 1 등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
- 2 등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
- 3 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 정확하게 충족시키고, 3-6의 요건 중 3가지를 만족하는 경우
- 4 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키고, 3-6의 요건 중 2가지를 만족하는 경우
- 5 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키고, 3-6의 요건 중 2가지를 만족하나 논리 전개 및 계산이 다소 미흡한 경우
- 6 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키고, 3-6의 요건 중 1가지를 만족하는 경우
- 7 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키지만, 3-6의 요건을 충족시키지 못한 경우
- 8 등급: 위의 6가지 기준 중 1, 2의 요건을 충족시키지 못한 경우
- 9 등급: 위의 6가지 기준을 대부분 충족시키지 못한 경우

8. 예시 답안

■ 1-1(a)

삼각형  $ABC$ 에서 선분  $BC$ 를 밑변으로 하였을 때, 높이는 점  $A$ 에서 직선  $BC$ 까지의 거리가 된다. 따라서 삼각형의 넓이가 최대가 되게 하는 타원 위의 점  $A$ 는 직선  $BC$ 와 평행한 직선이 타원과 접하는 점 중 직선  $BC$ 에서 멀리 떨어진 점이다. 직선  $BC$ 의 기울기는  $\frac{2}{3}$ 이므로, 타원 위의 점 중 접선의 기울기가  $\frac{2}{3}$ 인 점을 찾으면 된다. 타원 위의 점  $(a, b)$ 에서 접선의 방정식은  $\frac{ax}{9} + \frac{by}{4} = 1$ 이고 접선의 기울기는  $-\frac{4a}{9b}$ 이다. 따라서 방정식

$$-\frac{4a}{9b} = \frac{2}{3}, \quad \frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{4} = 1$$

을 풀면 두 점  $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ 를 얻는다. 두 점 중 직선  $BC$ 에 더 멀리 떨어진 점은  $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ 이다.

■ 1-1(b)

두 점  $B, C$ 가 직선  $y = -k$  (단,  $0 \leq k < 2$ ) 위에 놓여있다고 하면, 직선  $BC$ 에서 가장 멀리 떨어진 타원 위의 점은 점  $A(0, 2)$ 이다. 두 점  $B, C$ 의 좌표는 각각  $\left(-3\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}, -k\right), \left(3\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}, -k\right)$ 이므로 삼각형의 넓이  $S(k)$ 는

$$S(k) = 3(2+k)\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}$$

이다. 이를 미분하면  $S'(k) = -\frac{3(k^2+k-2)}{2\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}}$  이므로  $k=1$ 일 때,  $S(k)$ 는 최댓값  $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ 을 갖는다.

■ 1-2(a)

수학적 귀납법을 이용하여  $b_n$ 이 3의 배수가 아님을 증명해 보자.

(i)  $n=1$ 일 때,  $b_1=2$ 이므로 3의 배수가 아니다.

(ii)  $n=k$ 일 때,  $b_k$ 가 3의 배수가 아니라고 가정하면  $b_k^2$ 도 3의 배수가 아니다.

수열  $\{b_n\}$ 은 임의의 자연수  $n$ 에 대하여  $b_{n+1} = b_n^2 - 3b_n + 3$ 을 만족시키는 수열이므로

$b_{k+1} = b_k^2 - 3b_k + 3$ 이다. 이제 위 식을 변형하면

$$b_{k+1} + 3b_k - 3 = b_k^2$$

이다. 여기서  $-3b_k + 3$ 은 3의 배수이고  $b_k^2$ 은 3의 배수가 아니므로  $b_{k+1}$ 은 3의 배수가 아니다. 왜냐하면, 만일  $b_{k+1}$ 이 3의 배수이면 위 식의 좌변은 3의 배수이나 우변은 3의 배수가 아니기 때문이다. 그러므로 등식이 성립하지 않는다. 따라서  $n=k+1$ 일 때  $b_{k+1}$ 은 3의 배수가 아니다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여  $b_n$ 은 모든 자연수  $n$ 에 대하여 3의 배수가 아님을 알 수 있다.

■ 1-2(b)

수열  $\{b_n\}$ 이 서로 소 수열임을 증명해 보자.

수열  $\{b_n\}$ 은  $b_1=2$ 이고 임의의 자연수  $n$ 에 대하여  $b_{n+1} = b_n^2 - 3b_n + 3$ 을 만족한다. 이제 위 식을 변형하면

$$b_{n+1} - 3 = b_n^2 - 3b_n = b_n(b_n - 3) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이다. 따라서 임의의 두 자연수  $n$ 과  $m$  ( $n > m$ )에 대하여  $\textcircled{1}$ 식을 반복하여 적용하면

$$b_n - 3 = b_{n-1}b_{n-2} \cdots b_m(b_m - 3)$$

이다. 이제  $b_n$ 과  $b_m$ 의 공약수를  $k$ 라 하면,  $b_n - b_{n-1}b_{n-2} \cdots b_m(b_m - 3) = 3$ 에서  $k$ 가 좌변의 약수이므로  $k$ 는 3의 약수이어야 한다. 그러나  $b_n$ 은 3의 배수가 아니므로  $k \neq 3$ 이고 따라서  $k=1$ 이다. 즉,  $b_n$ 과  $b_m$ 은 서로 소이다. 그러므로 위와 같이 정의된 수열  $\{b_n\}$ 은 서로 소 수열이다.

■ 1-3(a)

$f(x) = x^3 + 3x^2 \cos \theta - 4 \sin 2\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) 이므로

$f'(x) = 3x^2 + 6x \cos \theta = 3x(x + 2 \cos \theta) = 0$ 이다. 따라서 제시문 <다>의 (I)을 이용하면

$$x = 0 \text{ 또는 } x = -2 \cos \theta$$

에서  $x$ 축과 접할 수 있다. 여기서  $f(0) = -4 \sin 2\theta < 0$ 이므로  $x=0$ 에서  $x$ 축과 접할 수 없다. 따라서  $x = -2 \cos \theta$ 에서  $x$ 축과 접하기 때문에 제시문 <다>의 (I)을 이용하면  $f(-2 \cos \theta) = 0$ 임을 알 수 있다. 그러므로

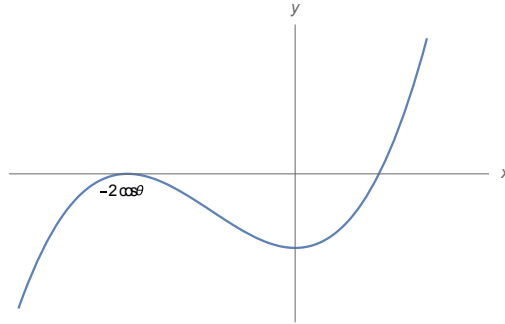
$$\begin{aligned} 0 &= f(-2 \cos \theta) \\ &= (-2 \cos \theta)^3 + 3(-2 \cos \theta)^2 \cos \theta - 4 \sin 2\theta \\ &= 4 \cos^3 \theta - 4 \sin 2\theta \\ &= 4 \cos^3 \theta - 8 \sin \theta \cos \theta \\ &= 4 \cos \theta (\cos^2 \theta - 2 \sin \theta) \\ &= 4 \cos \theta (1 - \sin^2 \theta - 2 \sin \theta) \end{aligned}$$

이다. 여기서  $\cos \theta > 0$ 이므로  $1 - \sin^2 \theta - 2 \sin \theta = 0$ 이다. 주어진  $\theta$ 의 범위에서  $\sin \theta$ 의 값은 0과 1 사

이에 놓여 있으므로

$$\sin \theta = \sqrt{2} - 1$$

을 얻는다. 그래프의 개형은 다음과 같다.



■ 1-3(b)

제시문 <다>의 (II)에 의해서  $\alpha = -2\cos \theta$ 에서  $x$ 축에 접하기 때문에 또 다른 한 근을  $\beta$ 라고 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + 2\cos \theta)^2 (x - \beta) \\ &= (x^2 + 4x\cos \theta + 4\cos^2 \theta)(x - \beta) \\ &= x^3 + (4\cos \theta - \beta)x^2 + (4\cos^2 \theta - 4\beta\cos \theta)x - 4\beta\cos^2 \theta \end{aligned}$$

이다. 또한

$$f(x) = x^3 + 3x^2\cos \theta - 4\sin 2\theta$$

이므로  $x^2$ 의 계수를 비교하면  $\beta = \cos \theta$ 이다.

( $x$ 의 계수 또는 상수항을 비교하여도 같은 결론을 얻는다. 다만 상수항끼리 비교하면  $\beta = 2\tan \theta$ 를 얻고 1-3(a)에서 얻은  $\sin \theta$ 의 값을 이용하면  $\beta = \cos \theta$ 임을 알 수 있다.)

따라서 구하는 부분의 넓이는 제시문 <다>의 (III)에서 주어진 정적분을 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2 (x - \beta) dx \right| \\ &= \left| \int_{-2\cos \theta}^{\cos \theta} (x + 2\cos \theta)^2 (x - \cos \theta) dx \right| \\ &= \frac{1}{12} (3\cos \theta)^4 \\ &= \frac{27}{4} \cos^4 \theta \\ &= \frac{27}{4} (1 - \sin^2 \theta)^2 \\ &= \frac{27}{4} \{1 - (\sqrt{2} - 1)^2\}^2 \\ &= 27(3 - 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$